Correction du devoir surveillé n° 5

Problème 1 Alimentation d'une diode électroluminescente

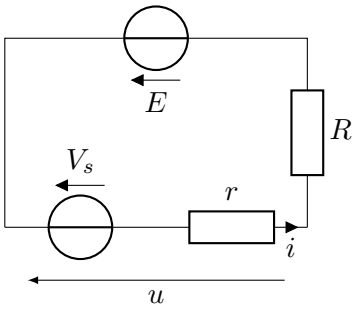
1. Lorsque la DEL est bloquée, l'intensité traversant cette DEL est nulle, on peut la modéliser par un interrupteur ouvert.

2. 2.a. $u = E_T + r_T i$ ou encore i $= \dfrac{u}{r_T} - \dfrac{E_T}{r_T}$.

   2.b. D'après la figure 2, on a : $i = \dfrac{u}{r} + b$. Or $i = 0$ pour $u = V_s$ ce qui donne : $0 = \dfrac{1}{r}V_s + b$ soit $b = -\dfrac{V_s}{r}$. Au final, on obtient : $\boxed{i = \dfrac{u}{r} - \dfrac{V_s}{r}}$.

   2.c. En comparant, on obtient : $\underline{E_T = V_s = 1{,}8\,\text{V}}$ et $\underline{r_T = r \simeq 1{,}0\,\Omega}$.

3. 3.a. On remplace la DEL par le modèle de Thévenin établi précédemment. Le circuit équivalent est :



   D'après la loi des mailles : $V_s - E + ri + Ri = 0$, soit $\boxed{i = \dfrac{E - V_s}{r + R}}$

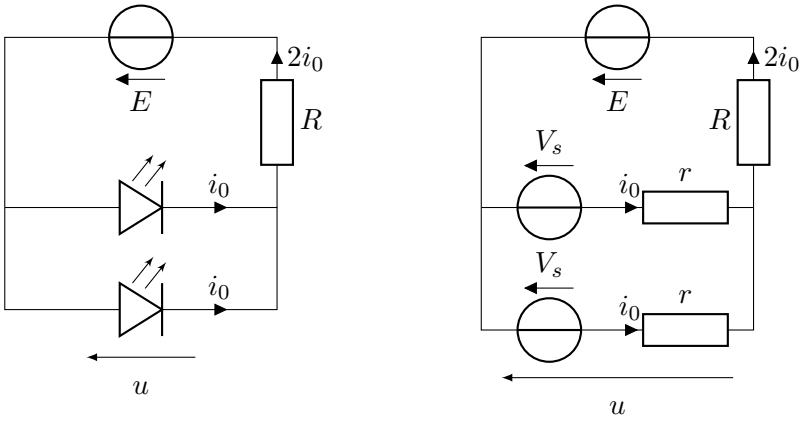
   3.b. On a donc $i_0 = \dfrac{E - V_s}{r + R_0}$, soit $\boxed{R_0 = \dfrac{E - V_s}{i_0} - r}$

   A.N. : $\underline{R_0 = 2{,}8 \times 10^2\,\Omega}$, $\underline{R_0 \gg r}$

   3.c. Il faut insérer :
   — le voltmètre en dérivation de la DEL avec la borne COM à droite,
   — l'ampèremètre en série sur la branche principale avec la borne COM sur la borne par laquelle sort i.

   On privilégie un montage à courte dérivation car la résistance de l'ampèremètre risque de ne pas être négligeable devant la résistance dynamique $r \simeq 1{,}0\,\Omega$.

4. 4.a. Le circuit devient :



4.b. Les deux branches contenant les photodiodes sont identiques, donc traversées par le même courant i_0. D'après la loi des noeuds, le générateur est traversé par le courant $2i_0$. Il ne reste donc qu'une seule inconnue i_0 (puisque toutes les tensions aux bornes des résistances s'exprimeront en fonction de i_0)
Une simple loi des maille donne : $E - V_s - ri_0 - R2i_0 = 0$, soit :

$$\boxed{R'_0 = R = \frac{E - V_s}{2i_0} - \frac{r}{2}}$$

A.N. : $\underline{R'_0 = 1{,}4 \times 10^2\,\Omega}$

4.c. La puissance dissipée par effet Joule dans R vaut : $\boxed{\mathcal{P}_R = R'_0 \times (2i_0)^2}$ A.N. : $\underline{\mathcal{P}_R = 1{,}3 \times 10^{-1}\,\mathrm{W}}$

La puissance reçue par chacune des diodes vaut : $\boxed{\mathcal{P}_d = ui = V_s i_0 + r i_0^2}$ A.N. : $\underline{\mathcal{P}_d = 2{,}7 \times 10^{-2}\,\mathrm{W}}$

La puissance fournie par le générateur idéal vaut : $\boxed{\mathcal{P}_g = E \times 2i_0}$
A.N. : $\underline{\mathcal{P}_g = 1{,}8 \times 10^{-1}\,\mathrm{W}}$

On retrouve le bilan de puissance traduisant la conservation de la puissance : $\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_R + 2\mathcal{P}_d}$

5. 5.a. La DEL bloquée est assimilable à un interrupteur ouvert, aucun courant ne traverse donc sa branche. Les résistances R_1 et R_2 sont traversées par le même courant, on retrouve le configuration d'un pont diviseur de tension :

$$\boxed{u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E}$$

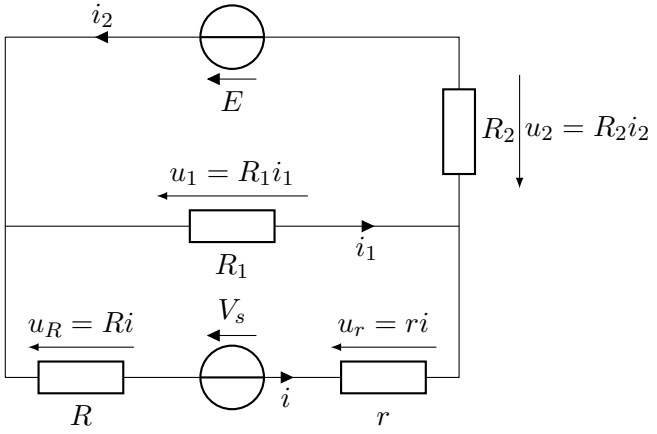
5.b. Pour que la diode soit bloquée, il faut que $u = \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} E < V_s$.

D'où $R_1 E < V_s R_1 + V_s R_2$, soit $R_1 < \dfrac{V_s R_2}{E - V_s}$.

On en déduit $\boxed{R_{1max} = \dfrac{V_s R_2}{E - V_s}}$.

A.N. $\underline{R_{1max} = 0{,}43\,\Omega}$.

5.c. On choisit $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k}\Omega$ donc la diode est passante et le circuit devient :



Il existe trois inconnues i, i_1 et i_2 (les tensions aux bornes des résistances s'exprimant en fonction de ces intensités). Il faut donc écrire un système de trois équations constitué par :
— une loi des nœuds : $i + i_1 = i_2$,
— une première loi des mailles reliant i_1 à i : $ri + V_s + Ri - R_1 i_1 = 0$,
— une deuxième loi des mailles reliant i_2 à i : $ri + V_s + Ri - E + R_2 i_2 = 0$.

$$\begin{cases} i = -i_1 + i_2 \\ i_1 = \dfrac{V_s + (r+R)i}{R_1} \\ i_2 = \dfrac{E - V_s - (r+R)i}{R_2} \end{cases}$$

Ainsi, $i = \dfrac{-V_s-(r+R)i}{R_1} + \dfrac{E-V_s-(r+R)i}{R_2}$,

soit $i\left(1+\dfrac{(r+R)}{R_1}+\dfrac{(r+R)}{R_2}\right) = \dfrac{-V_s}{R_1}+\dfrac{E-V_s}{R_2}$

D'où $\boxed{i = \dfrac{\dfrac{-V_s}{R_1}+\dfrac{E-V_s}{R_2}}{1+\dfrac{(r+R)}{R_1}+\dfrac{(r+R)}{R_2}} = \dfrac{ER_1-V_s(R_1+R_2)}{R_1R_2+(r+R)(R_1+R_2)}}$

A.N. : $\underline{i = 15\,\text{mA}}$. On retrouve la même intensité que précédemment.

Problème 2 Étude d'un défibrillateur

A Charge d'une batterie de condensateurs

A.1 $u(t=0^-)=0$ (condensateur déchargé) et $i(t=0^-)=0$ (circuit ouvert).

A.2 $u(0^+)=0$ (continuité de la tension aux bornes d'un condensateur) $i(0^+)=\frac{E}{R}$ (loi des mailles), $i(\infty)=0$ car un régime permanent est atteint et $i=C\frac{du}{dt}$ et $u(\infty)=E-Ri(\infty)=E$ (loi des mailles).

A.3 D'après la loi des mailles $E=Ri+u$ et $i=C\frac{du}{dt}$, soit $E=RC\frac{du}{dt}+u$. En posant $\tau=RC$, on obtient : $\frac{du}{dt}+\frac{u}{\tau}=\frac{E}{\tau}$. τ est homogène à un temps d'après l'analyse dimensionnelle de l'équation différentielle.

A.4 La solution de cette équation est la somme d'une solution particulière $u_{sp}=E$ et de la solution générale sans second membre $u_{sg}=Ke^{-\frac{t}{\tau}}$, soit $u(t)=E(1-e^{\frac{-t}{\tau}})$ puisque $u(0)=0$.

A.5 En prenant l'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote horizontale, on obtient $\tau = 0,75$ s soit $R=\frac{\tau}{C}=1,6\ \text{k}\Omega$.

A.6 La résistance mesurée à la question précédente correspond donc à la somme de la résistance de sortie du générateur et la résistance R. On obtient alors $R_g = 0,4\ k\Omega$

A.7 L'énergie électrique emmagasinée à la fin de la charge s'écrit : $E_C=\frac{1}{2}CE^2=0,53$ kJ

B Décharge de la batterie dans le défibrillateur

B.1 La tension aux bornes d'un condensateur est continue donc $u(t'=0^+)=E$ et $u'(t'=0^+)=0$. D'après la loi des nœuds $i+i_{C'}+i_r=0$, $i_r=\frac{u'}{r}=0$ et $u'=u+Ri$ soit $i(t'=0^+)=-\frac{E}{R}$ et $i_{C'}(t=0^+)=\frac{E}{R}$.

B.2 D'après la loi des mailles $u'=Ri+u$ et $i+i_{C'}+i_r=0$ soit $u'=R(-i_{C'}-i_r)+u$. On dérive cette relation pour remplacer $\frac{du}{dt}$ par $\frac{i}{C}$: $\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t} = R(-\dfrac{\mathrm{d}i_{C'}}{\mathrm{d}t}-\dfrac{\mathrm{d}i_r}{\mathrm{d}t})+\dfrac{-i-i_r}{C}$. En remplaçant $i_r=\frac{u'}{r}$ et $i_{C'}=C'\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}$ on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{RC'}(1+\frac{R}{r}+\frac{C'}{C})\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}+\frac{u'}{RrCC'}=0$$

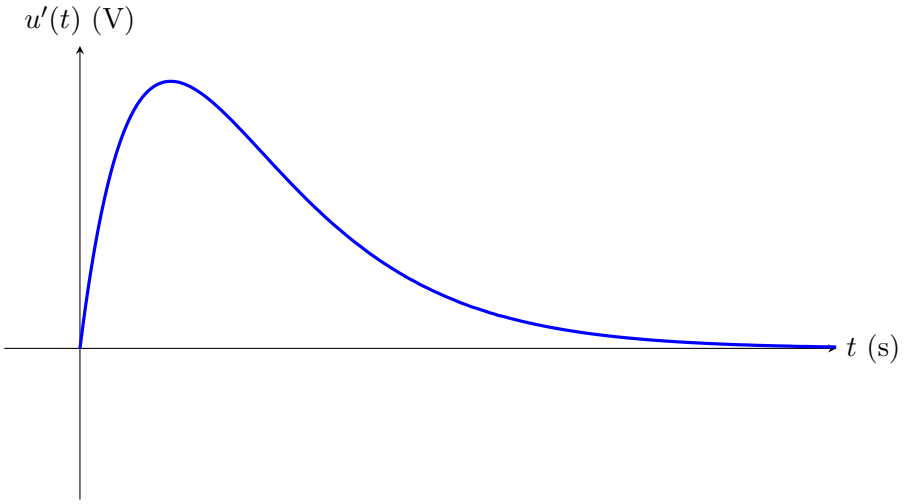
On retrouve alors la forme demandée avec $\boxed{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{RrCC'}}}$ et $\boxed{Q=\frac{RC'\omega_0}{1+\frac{R}{r}+\frac{C'}{C}}}$.

B.3 Pour obtenir une décharge la plus rapide possible sans oscillation, on doit se placer dans le cas du régime critique. Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle précédente s'écrit : $r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$. Pour obtenir un régime critique, le discriminant de ce polynôme doit être nul soit $\Delta=4\omega_0^2(\frac{1}{4Q^2}-1)=0$ soit $Q=\frac{1}{2}$. On doit donc choisir les composants pour vérifier $Q=\frac{1}{2}$.

B.4 La solution du régime critique est de la forme : $u'=(K_1+K_2t)e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}$ où K_1 et K_2 sont les constantes d'intégration. Sachant que $u'(t'=0)=0$ on en déduit $K_1=0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}(0)=\dfrac{i_{C'}(0)}{C'}=\dfrac{E}{RC'}=K_2$, soit

$\boxed{u'(t')=\frac{Et'}{RC'}e^{-\frac{\omega_0 t'}{2Q}}}$

B.5 allure de $u'(t)$:



B.6 Définition de l'équation différentielle :

```
def phiup(X,t):
    up=X[0]
    uppoint=X[1]
    return np.array([uppoint,-omega0**2*up-omega0/Q*uppoint])
```

Utilisation de la méthode d'Euler :

```
def Euler2(Phi,X0,tfinal,N):
    t=np.linspace(0,tfinal, N)# calcul des différents instants
    h=t[1]-t[0]# Détermination du pas de calcul
    X=np.zeros((N,2))
    X[0,:]=X0[:] #prise en compte des conditions initiales
    for k in range(0,N-1):
        X[k+1,:]=X[k,:] + h*Phi(X[k,:],t[k])
    return t,X
```

Tracé de la solution :

```
tfinal=10*Q/omega0    #durée du régime transitoire
N=2000
t,X=Euler2(phiup,X0,tfinal,N)
up=X[:,0]
plt.figure()
plt.plot(t,up,'-g')
plt.xlabel(r'$t$ (s)')
plt.ylabel(r'$u'(t)$ (V)')
plt.title(r'Décharge du défibrilateur')
plt.grid()
plt.show()
```

Problème 3 Il pleut ...

A Vitesse des gouttes de pluie

A.1 Le poids d'une goutte est l'action de la Terre sur celle-ci. Il s'exprime ainsi :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho\left(\frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3\right)g\vec{e_z}$$

$$\boxed{\vec{P} = \frac{\pi\rho D^3 g}{6}\vec{e_z}}$$

A.2 La dimension d'une force est donnée par la deuxième loi de Newton (par exemple) : $[F] = MLT^{-2}$. Pour la masse volumique $[\rho] = ML^{-3}$, pour la vitesse $[v] = LT^{-1}$, le diamètre d'une sphère étant une longueur, on a $\left[\overrightarrow{F_{\text{frott}}}\right] = \left[-C\pi\rho_a D^2 v^2 \vec{e_z}\right]$: **la formule est bien homogène.**

A.3 Nous appliquons le principe fondamental de la dynamique à la goutte, assimilée à un point matériel, dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Nous utilisons le vecteur $\vec{e_z}$ proposé par l'énoncé. Comme indiqué, le poids et la force de frottement fluide s'appliquent sur la goutte ainsi :

$$m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \overrightarrow{F_{\text{frott}}}$$

Lorsque la vitesse limite est atteinte $\vec{a} = \vec{0}$ (en effet $\vec{v} = \overrightarrow{v_{\text{lim}}} = \overrightarrow{\text{cte}}$). D'où, d'après les expressions des questions précédentes :

$$\vec{0} = \frac{\pi\rho D^3 g}{6}\vec{e_z} - C\pi\rho_a D^2 v_{\text{lim}}^2 \vec{e_z} = \vec{0}$$

On identifie v_{lim} par projection sur l'axe $\vec{e_z}$:

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{\rho g}{6C\rho_a}}\sqrt{D}$$

puis $\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = v_{\text{lim}}\vec{e_z}$, on identifie :

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{\rho g}{6C\rho_a}}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\vec{e_z}}$$

A.4 **Application numérique :** $K = 144\,\mathrm{m}^{1/2}/\mathrm{s}$ ainsi :
- pour $D = 1{,}0\,\mathrm{mm}$: $v_{\text{lim}} = 4{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
- pour $D = 3{,}0\,\mathrm{mm}$: $v_{\text{lim}} = 7{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$;
- pour $D = 5{,}0\,\mathrm{mm}$: $v_{\text{lim}} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

B Disdromètre à impact

B.1 On applique le principe fondamental de la dynamique à la platine dans le référentiel du support supposé galiléen dans une situation statique. On utilise le repère proposé par l'énoncé. Sur la platine s'exercent :
- son poids :
$$\vec{P} = Mg\vec{e_z}$$
- la force de frottement :
$$\vec{f} = -\lambda\overrightarrow{v_{\text{platine}}} = \vec{0}$$
car on traite une situation statique ;
- la force de rappel du ressort :
$$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = +k\left(\ell_{\text{éq}} - \ell_0\right)\vec{e_z}$$
en effet, si le ressort est étendu (soit $\ell - \ell_0 > 0$), alors la force est vers le bas ;
- la force d'impact de la goutte $\vec{F}(t) = \vec{0}$ (il n'y a pas d'impact dans cette situation).

Ainsi, appliquons le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{0} = Mg\vec{e_z} + \vec{0} + k\left(\ell_{\text{éq}} - \ell_0\right)\vec{e_z} + \vec{0}$$

En projetant sur $\vec{e_z}$:

$$Mg + k\left(\ell_{\text{éq}} - \ell_0\right) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}}$$

B.2 Reprenons la même étude, dans une situation non-statique :

— le mouvement étant limité à une translation sur l'axe z, l'accélération est :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2}\vec{e_z}$$

— le poids est inchangé ;

— la force de frottement est :

$$\vec{f} = -\lambda \overrightarrow{v_{\text{platine}}} = -\lambda \frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}\vec{e_z}$$

— la force de rappel du ressort est :

$$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = +k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{e_z}$$

or $Z = \ell_{\text{éq}} - \ell$ par définition d'où :

$$\overrightarrow{F_{\text{rappel}}} = k\,(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0)\,\vec{e_z}$$

Ainsi en projetant suivant $\vec{e}_z$:

$$M\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} = Mg - \lambda\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + k\,(\ell_{\text{éq}} - Z - \ell_0) + F(t)$$

or $Mg + k\,(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0$ d'après la question précédente donc :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{M}\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{M}Z = F(t)$$

On identifie :

$$\boxed{\gamma = \frac{\lambda}{M}} \quad \text{et} \quad \boxed{\beta = \frac{k}{M}} \quad \text{de sorte que} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \beta Z = \frac{F(t)}{M}}$$

B.3 τ correspond à la durée d'impact de la goutte sur la platine (ainsi l'accélération subie est de l'ordre de v_{lim}/τ). Cela correspond à l'intervalle de temps séparant l'impact de la tête de la goutte et l'impact de sa queue. Ainsi, si sa vitesse n'évolue pas au cours de l'impact $v_{\text{lim}}\tau = D$ d'où :

$$\boxed{\tau \approx \frac{D}{v_{\text{lim}}(D)}}$$

Or $v_{\text{lim}} = K\sqrt{D}$ d'où, avec le facteur correctif proposé par l'énoncé :

$$\boxed{\tau = \xi\frac{\sqrt{D}}{K} = 2{,}2 \times 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}22\,\text{ms}}$$

B.4

1. La réponse du disdromètre est la plus rapide si le discriminant du polynôme caractéristique est nul (régime critique) soit

$$\boxed{\frac{\gamma^2}{4} = \beta}$$

2. On cherche à résoudre l'équation :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t} + \frac{\gamma^2}{4}Z = \frac{F_0}{M}$$

avec les conditions initiales $Z(0) = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}(0) = 0$. Résolvons d'abord l'équation homogène. Le polynôme caractéristique est :

$$r^2 + \gamma r + \frac{\gamma^2}{4} = 0$$

il possède une racine double $r_0 = -\gamma/2$. La solution de l'équation homogène est donc :

$$Z(t) = (At + B)\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$$

où A et B sont deux constantes d'intégration. Une solution particulière de cette équation est $Z(t) = \frac{4F_0}{M\gamma^2}$ (en effet, dans ce cas les dérivées sont nulles d'où le résultat). Or :

$$\frac{4}{M\gamma^2} = \frac{1}{\beta M} = \frac{1}{k}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$Z(t) = \frac{F_0}{k} + (At + B)\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)$$

Cherchons A et B en utilisant les conditions initiales.

$$Z(0) = \frac{F_0}{k} + B$$

donc, comme $Z(0) = 0$, $B = -\frac{F_0}{k}$. Ensuite :

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}(t) = 0 + A\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right) + (At + B)\left(\frac{-\gamma}{2}\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\right)$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}t}(0) = A - \frac{\gamma B}{2}$$

ainsi $A = \gamma B/2$ finalement :

$$\boxed{Z(t) = \frac{F_0}{k}\left(1 - \left(\frac{\gamma t}{2} + 1\right)\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\right)}$$

3. Il faut $Z(\tau) = \frac{F_0}{k}$ soit :

$$\left(\frac{\gamma\tau}{2} + 1\right)\exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2}\right) = 0$$

γ et τ étant positifs, il est impossible que $\frac{\gamma\tau}{2} + 1$ soit nul. Si $\boxed{\frac{\gamma\tau}{2} \gg 1}$, alors

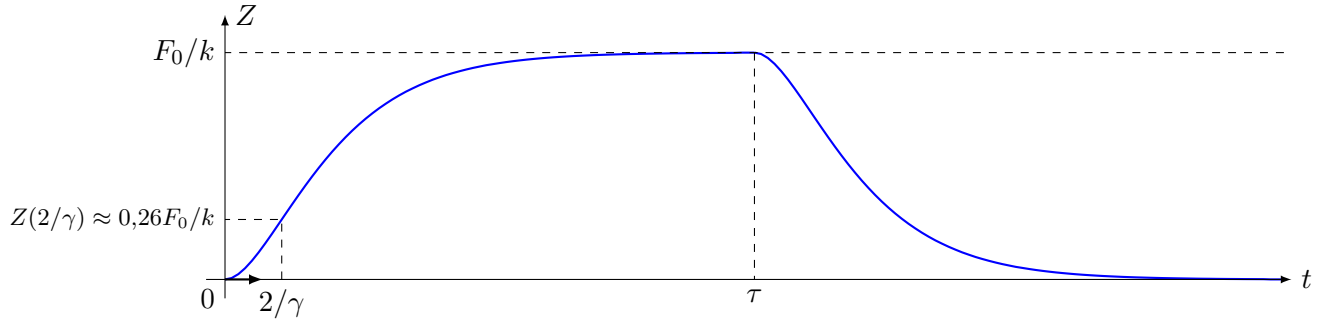
$$\exp\left(-\frac{\gamma\tau}{2}\right) \ll 1$$

et on peut écrire $\boxed{Z(\tau) = \frac{F_0}{k}}$ Ainsi :

$$Z(\tau) = \frac{\pi\rho D^3}{6}\frac{K\sqrt{D}}{\frac{\xi\sqrt{D}}{K}}\frac{1}{k} = \frac{\pi\rho}{6}\frac{K^2}{\xi k}D^3$$

On a démontré le résultat demandé avec $\boxed{\alpha = 3}$

4. Pour $\tau < t < 2\tau$, on observe la relaxation du plateau vers sa position d'équilibre sans force, sur un même temps typique :



5. Le coefficient de proportionnalité entre Z et D^3 est $\frac{\pi\rho}{6}\frac{K^2}{\xi k}$ ne dépend pas de la goutte. La connaissance de ces différents coefficients ou un étalonnage permet de relier Z à D.