Lycée Chateaubriand
PCSI 1 & 3

Samedi 10 février 2023

**Devoir surveillé n° 5**

# Électromécanique

- *La durée de l'épreuve est de 3 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.*
- *L'usage de la calculatrice est autorisé.*
- *Les numéros de questions et les résultats doivent ressortir de votre copie (pas de rédaction monochrome).*
- *Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.*
- *Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.*
- *Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*

## Problème 1 Alimentation d'une diode électroluminescente

Une diode électroluminescente (DEL, Figure 1) a pour propriété d'émettre de la lumière lorsqu'elle est traversée par un courant. On note $u$ la tension à ses bornes et $i$ l'intensité du courant qui la traverse. Sa caractéristique en convention récepteur est donnée par le tracé de $i$ en fonction de $u$ (Figure 2). Elle est constituée :

- d'une « branche bloquée » pour laquelle $i = 0$,
- d'une « branche passante » correspondant à $i > 0$.

Une telle diode est caractérisée par deux grandeurs (précisées sur la caractéristique, Figure 2) : la tension seuil $V_s = 1{,}8\,\mathrm{V}$ et la résistance dynamique $r \simeq 1{,}0\,\Omega$.
La diode s'éclairera de façon satisfaisante lorsqu'elle sera traversée par un courant d'intensité $i$ compris entre 10 et $20\,\mathrm{mA}$.

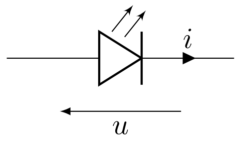



Figure 1

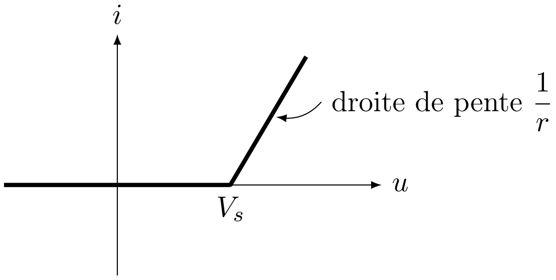
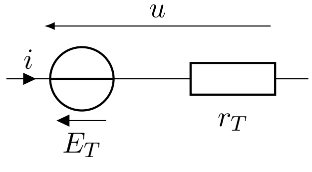



Figure 2

1. Par quel dipôle peut-on modéliser la DEL lorsqu'elle est bloquée ($u < V_S$) ?
2. Sur sa branche passante, la DEL est modélisée, en convention récepteur, par un modèle de Thévenin de force électromotrice $E_T$ et de résistance interne $r_T$.




2.a. Donner la relation entre $u$, $E_T$, $r_T$ et $i$.

2.b. À l'aide de la figure 2, déterminer la relation courant-tension, reliant $u$, $i$, $V_s$ et $r$, valable pour la DEL passante.

2.c. En déduire l'expression et la valeur de $r_T$. Même question pour $E_T$.

Dans la suite, dès que la diode est passante, on la remplacera par son modèle de Thévenin.

3. La diode est branchée en série avec un générateur de f.e.m. $E = 6{,}0\,\mathrm{V}$, et un résistor de résistance $R$ (Figure 3). On admet que dans cette configuration la DEL est nécessairement passante.

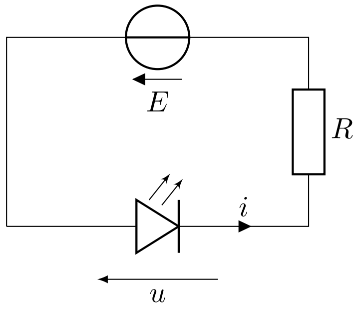



Figure 3

3.a. Donner l'expression de l'intensité $i$ en fonction de $E$, $V_s$, $R$ et $r$.

3.b. Déterminer littéralement puis numériquement la valeur $R_0$ de $R$ permettant d'obtenir $i = i_0 = 15\,\mathrm{mA}$ (rendant possible un éclairage satisfaisant). Comparer $R_0$ et $r$.

3.c. Reproduire le circuit sur votre copie en y faisant apparaître les appareils de mesure avec leurs bornes COM permettant de mesurer $u$ et $i$ simultanément.

4. Deux DEL identiques sont maintenant branchées en dérivation et insérées à la place de la DEL précédente, et dans le même sens que celle-ci.

4.a. Redessiner le schéma du circuit.

4.b. Expliciter, en fonction de $E$, $V_s$, $i_0$ et $r$, la nouvelle valeur $R'_0$ que l'on doit donner à $R$ pour obtenir une intensité de $i_0 = 15\,\mathrm{mA}$ dans chacune des deux diodes ? Calculer $R'_0$.

4.c. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_R$ reçue par le résistor de résistance $R = R'_0$ puis la puissance $\mathcal{P}_d$ reçue par chacune des deux DEL et enfin la puissance $\mathcal{P}_g$ fournie par le générateur de f.e.m. $E$. Commenter.

5. Enfin, le montage est modifié selon le schéma suivant (Figure 4), avec $R_2 = 1{,}0\,\Omega$.

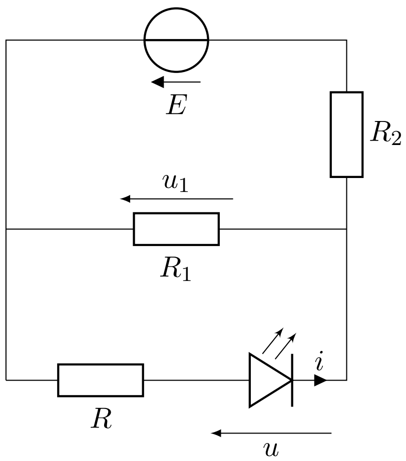



Figure 4

5.a. On suppose dans cette question que la DEL est bloquée. Donner alors l'expression de la tension $u_1$ aux bornes de $R_1$ en fonction de $R_2$, $R_1$ et $E$.

5.b. Quelle valeur maximale ne doit pas dépasser $R_1$ pour que la DEL fonctionne bien sur sa branche bloquée ?

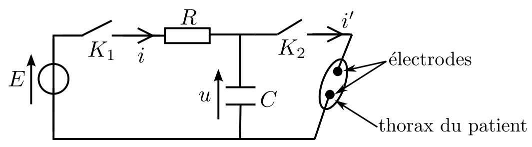
5.c. On choisit $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k}\Omega$ et $R = 0{,}28\,\mathrm{k}\Omega$. Calculer l'intensité $i$ traversant la DEL en fonction de $r$, $R$, $R_1$, $R_2$, $V_s$ et $E$ . Faire l'application numérique. Commenter.

# Problème 2 Étude d'un défibrillateur

Le défibrillateur cardiaque est un appareil utilisé en médecine d'urgence. Il permet d'appliquer un choc électrique sur le thorax d'un patient, dont les fibres musculaires du cœur se contractent de façon désordonnée (fibrillation).

En 1947, le Dr Claude Beck invente dans l'hôpital Universitaire de Cleveland le défibrillateur fonctionnant avec le courant alternatif du secteur, avec une tension utile de l'ordre de 1,5 kV. Dans les années 1960, une amélioration notable est de permettre l'utilisation ambulatoire d'un défibrillateur à alimentation autonome à courant continu. On stocke de l'énergie dans des condensateurs, puis cette énergie est libérée pendant un intervalle de temps très court.

Le défibrillateur peut être représenté de façon simplifiée par le schéma électrique suivant :




Le générateur délivre une tension $E$=1500 V et la capacité du condensateur est $C = 470\ \mu$F. Le thorax du patient sera assimilé à l'association d'un condensateur de capacité $C'$ et d'un conducteur ohmique de résistance $r$ . L'objectif de ce problème est d'étudier les deux phases d'utilisation du défibrillateur : la charge et la décharge du condensateur.

## A Charge d'une batterie de condensateurs

A l'instant $t = 0$ pris pour origine des temps on ferme l'interrupteur $K_1$ alors que les interrupteurs $K_1$ et $K_2$ étaient ouverts depuis longtemps et que le condensateur était déchargé.

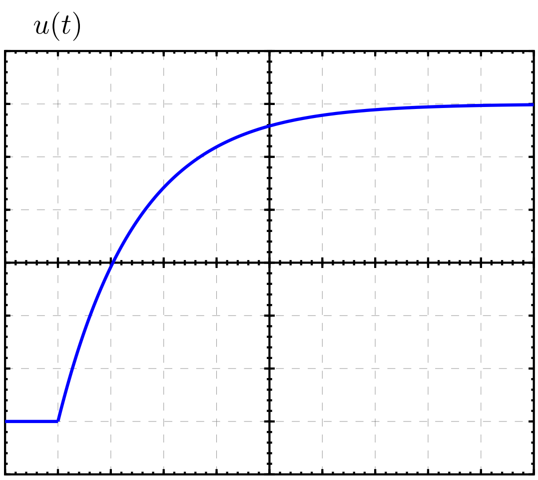
**A.1** Déterminer les valeurs de $u(t = 0^-)$ et $i(t = 0^-)$ juste avant de fermer l'interrupteur $K_1$.

**A.2** Déterminer en vous appuyant sur des arguments physiques les grandeurs suivantes $i(0^+)$, $u(0^+)$, $i(\infty)$ et $u(\infty)$.

**A.3** Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur en faisant intervenir la constante $\tau = RC$. Déterminer la dimension de $\tau$.

**A.4** Résoudre cette équation différentielle.

**A.5** L'évolution de la tension du condensateur en fonction du temps est représentée sur l'oscillogramme ci-dessous. Le nombre de volts par division et la sensibilité temporelle sont indiqués sous l'oscillogramme. La courbe a été décalée verticalement pour une meilleur visualisation. En déduire la valeur de la résistance $R$.

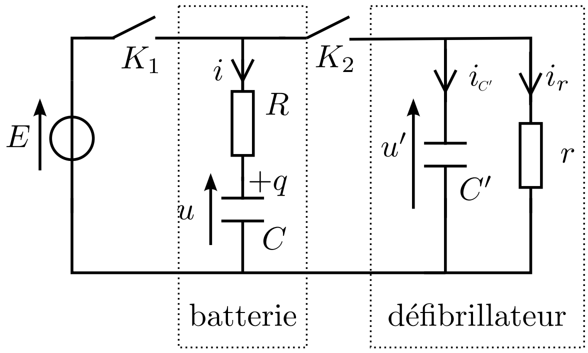



CH1 250 V/div 500 ms/div

**A.6** En réalité la résistance mesurée à la question précédente ne correspond pas à la résistance introduite entre l'alimentation et le condensateur puisque, l'alimentation ne peut pas être considérée comme une source idéale de tension. On doit alors prendre en compte la résistance de sortie de l'alimentation : $R_g$. Déterminer alors $R_g$ en considérant que $R = 1,2\ k\Omega$.

**A.7** Calculer l'énergie électrique emmagasinée à la fin de la charge.

## B Décharge de la batterie dans le défibrillateur




A l'instant $t' = 0$, on ouvre l'interrupteur $K_1$ et on ferme l'interrupteur $K_2$. Le condensateur $C$ porte alors la charge $q = CE$ et le condensateur $C'$ est déchargé.

**B.1** Déterminer en vous appuyant sur des arguments physiques les grandeurs suivantes $u(t' = 0^+)$, $u'(t' = 0^+)$, $i(t' = 0^+)$, $i_{C'}(t' = 0^+)$ et $i_r(t' = 0^+)$.

**B.2** Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $u'$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2u'}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u' = 0$$

On exprimera $\omega_0$ et $Q$ en fonction de $r$, $R$, $C$ et $C'$.

**B.3** On veut réaliser une décharge la plus rapide possible et sans oscillations « parasites ». Quel est le régime le plus adapté. En déduire une condition sur les valeurs des composants.

**B.4** En supposant que la condition de la question précédente est vérifiée, résoudre l'équation différentielle vérifiée par $u'$.

**B.5** Représenter l'allure de $u'(t')$.

**B.6** On se propose de résoudre numériquement cette équation à l'aide de la méthode d'Euler et le langage de programmation python. Pour cela on suppose que les bibliothèques `numpy` et `matplotlib` sont préalablement importées via les commandes `import numpy as np` et `import matplotlib.pyplot as plt`. On suppose également que les variables globales `omega0`, `Q` sont définis ainsi que le tableau numpy `X0` contenant les conditions initiales $u'(0^+)$ et $\dfrac{\mathrm{d}u'}{\mathrm{d}t}(0^+)$.

Proposer l'écriture d'un programme python permettant de résoudre numériquement l'équation différentielle de la question B.2. et d'afficher l'évolution de $u'(t)$ en fonction du temps sur une durée judicieusement choisie. Vous préciserez lorsqu'elles ne seront pas explicites vos initiatives.

# Problème 3 Il pleut ...

## A Vitesse des gouttes de pluie

On s'intéresse à la chute dans l'air d'une goutte d'eau de diamètre $D$ et de masse volumique $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. On prendra pour l'air une masse volumique égale à $\rho_a = 1{,}3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. L'axe $Oz$ est vertical descendant. L'accélération de la pesanteur vaut $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{e_z}$, avec $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

**A.1** Définir et exprimer le poids d'une goutte d'eau.

**A.2** On admet que la seule autre force mise en jeu est la force de frottement, due à l'air, proportionnelle au carré de la vitesse $v$ de la goutte. Elle s'écrit :

$$\overrightarrow{F_{\text{frott}}} = -C\pi\rho_a D^2 v^2 \overrightarrow{e_z} \quad \text{avec} \quad C = 6{,}0 \times 10^{-2}$$

Vérifier l'homogénéité de cette formule.

**A.3** En appliquant la seconde loi de Newton à la goutte dans le référentiel terrestre, montrer que sa vitesse limite, donc indépendante du temps, s'écrit :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z}$$

où $K$ est un coefficient à exprimer en fonction de $\rho$, $\rho_a$, $C$ et $g$.

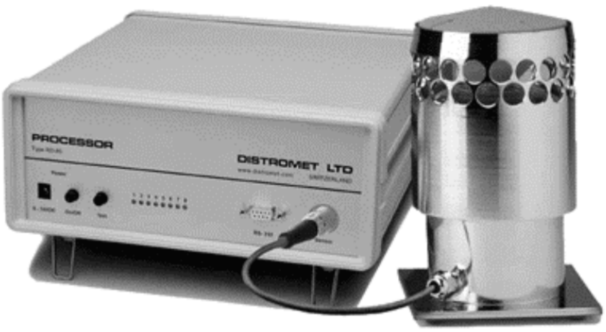
**A.4** Calculer la vitesse limite pour des diamètres égaux à 1,0 mm, 3,0 mm et 5,0 mm.

## B Disdromètre à impact

On suppose dans cette partie que la vitesse limite atteinte par une goutte de diamètre $D$ qui tombe dans l'atmosphère est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{v_{\text{lim}}} = K\sqrt{D}\overrightarrow{e_z} \quad \text{avec} \qquad K = 150\,\mathrm{m^{1/2}s^{-1}}$$

Il existe deux types de disdromètres : le plus ancien est le disdromètre à impact (photo ci-dessous).




Il se compose d'une platine sensible recevant les gouttes de pluie de masse $m(D)$ ayant atteint leur vitesse limite et d'un système de traitement permettant la mesure de celle-ci.

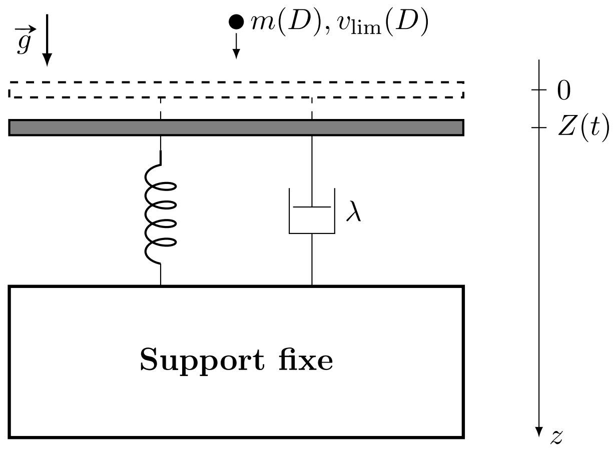
On modélise la platine par un disque plan horizontal, de rayon $R$ et de masse $M$, relié à un support fixe par l'intermédiaire d'une suspension, modélisée par un système masse-ressort amorti.

On note $k$ la raideur du ressort liant la platine au support, $\ell_0$ sa longueur à vide et $\lambda$ le coefficient de frottement traduisant l'amortissement du disque : la force de frottement, qui s'oppose à la vitesse de la platine, s'écrit donc $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v_{\text{platine}}}$.

La goutte exerce, lors de son impact sur la platine, une force $\overrightarrow{F(t)} = F(t)\overrightarrow{e_z}$ verticale sur celle-ci.

Le référentiel lié au support est supposé galiléen.

Le déplacement de la platine du disdromètre par rapport à sa position d'équilibre est $Z(t)$ (figure ci-dessous).




**B.1** Exprimer la longueur $\ell_{\text{équ}}$ du ressort à l'équilibre de la platine, sans impact de goutte.

**B.2** Montrer que l'équation liant $Z(t)$ à $F(t)$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 Z(t)}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}Z(t)}{\mathrm{d}t} + \beta Z(t) = \frac{F(t)}{M}$$

et exprimer les coefficients $\gamma$ et $\beta$ en fonction de $k$, $M$ et de $\lambda$.

La force $F(t)$ est modélisée par :

- $F = F_0 = m(D)\dfrac{v_{\lim}(D)}{\tau(D)}$ pour $0 < t < \tau$
- $F = 0$ pour $t > \tau$

**B.3** Donner la signification physique de $\tau$ et justifier que son ordre de grandeur est :

$$\tau(D) \approx \frac{D}{v_{\lim}(D)}$$

On utilise en pratique un facteur correctif $\xi = 0{,}65$ tel que :

$$\tau(D) = \xi \frac{D}{v_{\lim}(D)}$$

Calculer $\tau$ pour $D = 2{,}5\,\mathrm{mm}$.

**B.4** On se place à $0 \leq t \leq \tau(D)$ et on souhaite que la réponse du disdromètre soit la plus rapide possible.

1. Quelle doit être la relation entre les coefficients $\beta$ et $\gamma$ ? Dans la suite on se place dans ce cas.
2. Le système étant à l'équilibre avant la chute de la goutte, montrer que la réponse du disdromètre s'écrit alors pour $0 \leq t \leq \tau$ :

$$Z(t) = \frac{F_0}{k}\left[1 - \left(1 + \gamma\frac{t}{2}\right)e^{-\gamma t/2}\right]$$

3. Comment choisir $\gamma$ pour réaliser $Z(\tau) = \dfrac{F_0}{k}$ ? Montrer alors que $Z(\tau)$ est proportionnel à $D^\alpha$ et donner la valeur de $\alpha$.
4. Tracer l'allure de $Z(t)$ pour $0 \leq t \leq 2\tau$.
5. Comment la mesure de $Z(t)$ permet-elle de connaître $D$ ?