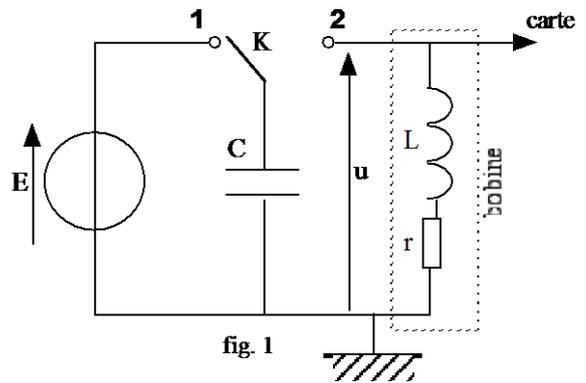


### Problème 1: Etude de bobines...

#### Exercice 1: Décharge d'un condensateur dans une bobine

Dans le cadre d'une séance de TP, on étudie la décharge d'un condensateur dans une bobine dans le but de déterminer l'inductance propre  $L$  et la résistance  $r$  de cette bobine. On réalise pour cela le montage ci-contre à l'aide d'une source de tension continue de f.e.m  $E = 5,00 \text{ V}$  et d'un condensateur de capacité  $C$ . L'interrupteur  $K$  étant initialement fermé en position 1, on le bascule à l'instant  $t = 0$  en position 2 et on enregistre à l'aide d'une carte d'acquisition l'évolution de la tension  $u$ .



1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u(t)$  et la mettre sous la forme canonique

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

Donner les expressions du facteur de qualité  $Q$  et de la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $r$ ,  $L$  et  $C$ .

2. L'enregistrement de la tension  $u(t)$  montre que ses variations sont pseudo-sinusoidales et peuvent être décrites par une loi de la forme  $u(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\Omega t + \phi)$  où  $A$  et  $\phi$  sont deux constantes d'intégration déterminées par les conditions initiales.

2.1. A quelle inégalité doit satisfaire la résistance  $r$  pour que la forme générale de la solution de l'équation différentielle soit bien celle indiquée ci-dessus ?

2.2. Exprimer la pseudo-période  $T$  des oscillations ainsi que  $\lambda$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ . A quelle condition sur  $Q$  peut-on considérer que  $T$  peut être confondue avec la période propre  $T_0$  du circuit non amorti ?

2.3. On définit le décrément logarithmique par :

$$\delta = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right)$$

Déterminer l'expression de  $\delta$  en fonction de  $Q$ . Quelle forme simplifiée prend cette relation dans le cas d'un circuit très faiblement amorti ?

3. Le tableau ci-dessous rassemble les valeurs de  $u$  et  $t$  correspondant aux 5 premiers maxima observés sur l'enregistrement obtenu grâce à la carte d'acquisition.

<b>t (ms)</b>	1,5	3,1	4,6	6,1	7,7
<b>u (V)</b>	3,52	2,47	1,73	1,21	0,845

3.1. D'après ces données, déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique et de la pseudo-période des oscillations.

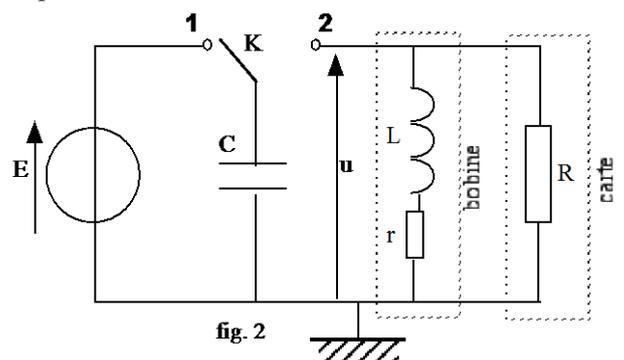
3.2. En déduire le facteur de qualité et la pulsation propre du circuit, puis les valeurs de l'inductance  $L$  et de la résistance  $r$  de la bobine, sachant que  $C = 0,50 \mu\text{F}$ .

4. La carte d'acquisition présentant une résistance d'entrée  $R$ , on désire s'assurer des conditions expérimentales à respecter pour que cette résistance n'influe pas sur les résultats des mesures. Le circuit étudié est alors modélisable par le schéma de la figure 2.

4.1. Etablir que la tension  $u(t)$  obéit maintenant à l'équation différentielle :

$$LC \cdot \left(\frac{d^2u}{dt^2}\right) + \left(\frac{L}{R} + rC\right) \cdot \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot u = 0$$

4.2. Donner la nouvelle expression de la pulsation propre du circuit et vérifier que celle-ci n'est pas affectée par la présence de la carte d'acquisition sachant que  $r \ll R$ .



**4.3.a.** Exprimer le facteur de qualité  $Q'$  du circuit en fonction de  $\omega_0$ ,  $L$ ,  $r$ ,  $R$  et  $C$ . (D'après 4.2 on considèrera la valeur de la pulsation propre inchangée.)

A quelle condition portant sur la constante de temps  $RC$  peut-on considérer que  $Q'$  s'identifie à la valeur de  $Q$  obtenue question 1 ?

**4.3.b.** On peut lire sur la notice technique de la carte d'acquisition que  $R = 500 \text{ k}\Omega$ . Vérifier qu'avec la valeur choisie pour  $C$ , le critère précédent est respecté et que la perturbation due à la carte a donc une influence négligeable.

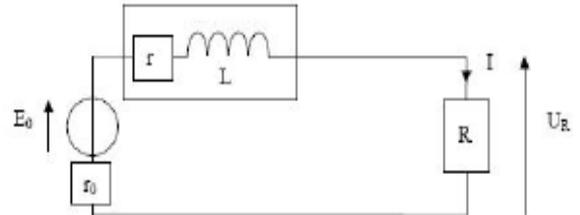
## Exercice 2: Etude d'une bobine

On dispose d'une bobine modélisable par l'association en série d'une inductance de valeur  $L$  et d'une résistance de valeur  $r$ .

On se propose de mesurer les caractéristiques  $r$  et  $L$  de cette bobine par différentes méthodes.

### Mesure en régime continu

On réalise le circuit de la figure ci-contre, en plaçant en série avec la bobine, un résistor de résistance  $R = 40 \Omega$ . L'alimentation est un générateur de tension constante, de force électromotrice  $E_0 = 1,0 \text{ V}$  et de résistance interne  $r_0 = 2,0 \Omega$ .



**1.1.** Quel est le modèle équivalent à cette bobine en régime continu ?

**1.2.** On mesure en régime permanent une tension  $U_R = 0,56 \text{ V}$ .

Exprimer  $r$  en fonction des données, puis en déduire sa valeur numérique.

### Mesures en régime sinusoïdal

#### 2. Mesures à l'aide d'un multimètre

On remplace dans le montage précédent le générateur de tension continue par un générateur basse fréquence délivrant une tension  $u_e$  sinusoïdale de fréquence  $f = 250 \text{ Hz}$ .

Le générateur est réglé de telle sorte que la tension efficace mesurée aux bornes de la résistance à l'aide d'un multimètre numérique vaille  $U_R = 3,00 \text{ V}$ . On branche ensuite le multimètre aux bornes de la bobine et celui-ci indique alors une tension  $U_B = 8,07 \text{ V}$ .

**2.1.** Quelle valeur en déduirait-on pour  $L$  en modélisant la bobine par une inductance pure ?

Quelle serait alors la valeur de la tension indiquée par le multimètre si on le branchait aux bornes du générateur ?

**2.2.** La mesure de la tension aux bornes du générateur donne en fait  $U_e = 9,34 \text{ V}$ .

Déduire des trois mesures effectuées les valeurs de  $Z = |Z|$  et  $Z_B = |Z_B|$ , où  $z$  et  $z_B$  désignent respectivement les impédances complexes du circuit et de la bobine.

**2.3.** Déterminer l'expression de  $r$  en fonction de  $R$ ,  $Z$  et  $Z_B$ .

Calculer alors la valeur de  $r$  ainsi que celle de l'inductance  $L$  de la bobine.

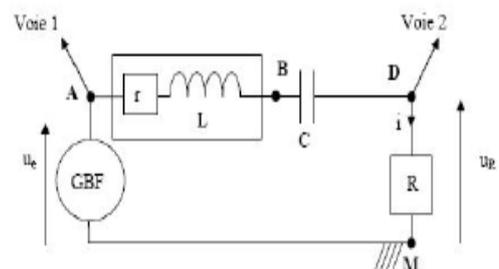
#### 3. Détermination de $r$ et $L$ à partir d'un oscillogramme

On utilise maintenant un oscilloscope pour mesurer les valeurs de  $r$  et  $L$ .

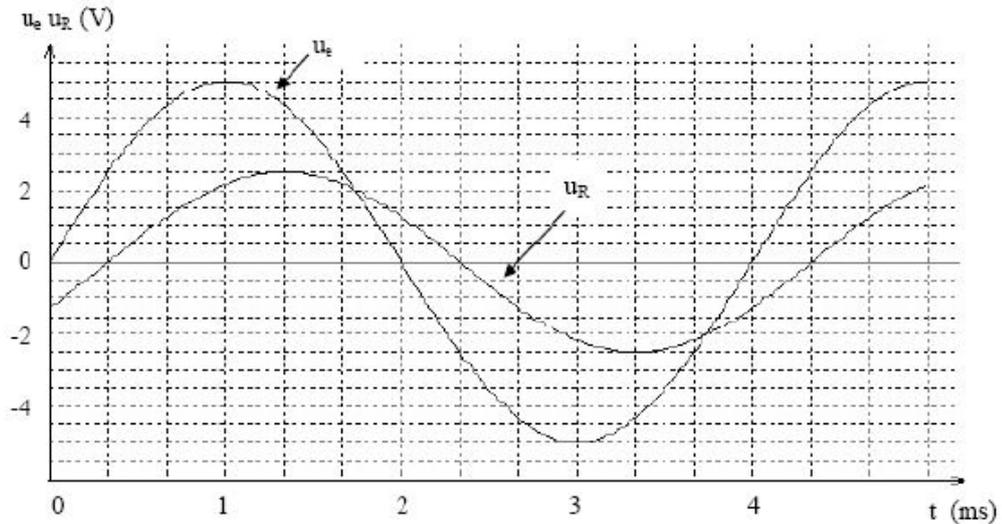
En série avec la bobine et le résistor précédent de résistance  $R$ , on place un condensateur de capacité  $C = 10 \mu\text{F}$ .

Le GBF est réglé pour délivrer une tension sinusoïdale d'une valeur crête à crête de  $10 \text{ V}$ , la fréquence gardant la valeur  $f = 250 \text{ Hz}$  (on  $\omega$  note la pulsation correspondante).

Sur un oscilloscope numérique, on observe les tensions  $u_e(t)$  et  $u_R(t)$ .



On obtient l'oscillogramme suivant :



- 3.1. Donner les valeurs de l'amplitude  $U_{em}$  de la tension  $u_e$  et de l'amplitude  $U_{Rm}$  de la tension  $u_R$ . Déterminer la valeur numérique de l'amplitude  $I_m$  de l'intensité du courant  $i(t)$
- 3.2. Donner l'expression littérale de l'impédance complexe  $\underline{z}$  du dipôle AM. Grâce aux résultats de la question précédente, calculer  $Z = |\underline{z}|$ .
- 3.3. Des deux tensions,  $u_R(t)$  et  $u_e(t)$ , quelle est celle qui est en avance sur l'autre ? A partir de l'oscillogramme, déterminer le déphasage  $\varphi$  entre  $u_e(t)$  et  $u_R(t)$ .
- 3.4. Donner l'expression de  $r$  en fonction de  $R$ ,  $Z$  et  $\varphi$  ainsi que celle de  $L$  en fonction de  $Z$ ,  $\varphi$ ,  $C$  et  $\omega$ .
- 3.5. Déduire des mesures effectuées les valeurs de l'inductance  $L$  et de la résistance  $r$  de la bobine. Vérifier la concordance avec les résultats obtenus précédemment.

## Problème 2 : Isolation thermique et acoustique

### I. Double vitrage et isolation acoustique

#### I.1 Présentation de l'isolation acoustique du simple vitrage

Sur la figure 1, la courbe en trait tireté représente l'atténuation acoustique d'un simple vitrage en fonction de la fréquence de l'onde sonore incidente. La fréquence  $f \approx 3000$  Hz, autour de laquelle on constate une baisse d'atténuation, est appelée fréquence critique de la vitre. On peut en obtenir une expression à l'aide d'une analyse de mécanique des fluides, qui ne sera pas faite ici.

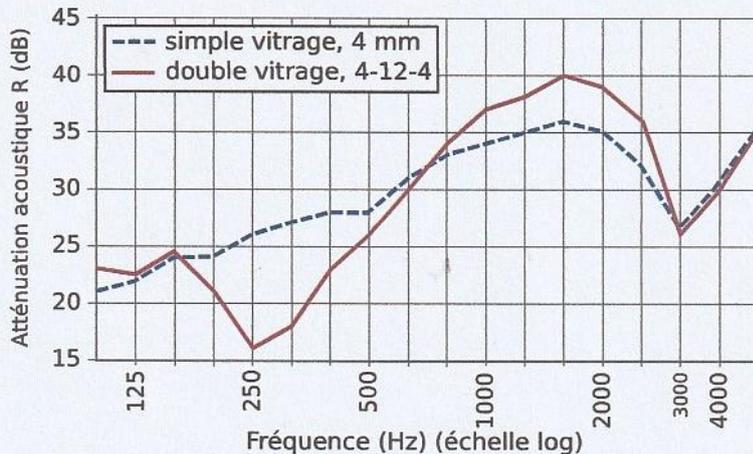


Figure 1 : atténuation par un simple vitrage (vitre de 4 mm) et un double vitrage (vitre de 4 mm, vide de 12 mm, vitre de 4 mm). L'échelle verticale est en décibels, mais il n'est pas nécessaire d'en connaître la définition : simplement, plus l'atténuation en décibels est importante, plus l'onde sonore transmise est d'amplitude faible.

1 - Rappeler la gamme de fréquences audibles par l'être humain.

#### I.2 Double vitrage : étude en régime forcé

La figure 1 montre également la courbe d'atténuation acoustique du double vitrage (en trait plein). Elle présente deux baisses d'atténuation : une vers 250 Hz et une vers 3000 Hz.

2 - Comment s'explique la baisse d'atténuation vers 3000 Hz ?

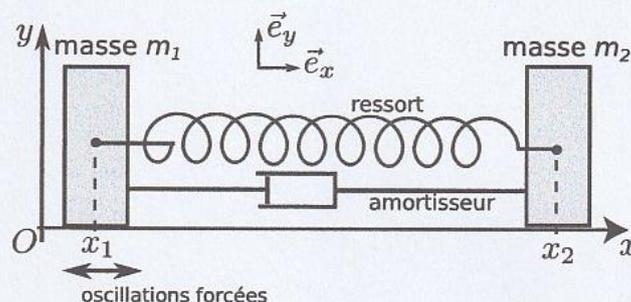
La présence de la baisse d'atténuation vers 250 Hz, absente pour le simple vitrage, montre que le double vitrage est globalement moins performant que le simple vitrage. Nous allons étudier l'origine de cette baisse.

Pour cela, on modélise le double vitrage comme deux masses  $m_1$  et  $m_2$  qui représentent chacune une vitre. La lame d'air qui sépare les deux vitres est modélisée par un ressort (pour son rôle élastique de transmission des vibrations) associé à un amortisseur visqueux (pour rendre compte de la dissipation).

– Le ressort possède une longueur à vide  $l_0$  et une constante de raideur  $k$ .

– L'amortisseur exerce sur la masse 2 une force  $\vec{f} = -\alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\vec{e}_x$  avec  $\alpha$  une constante et  $\dot{x}_1$  et  $\dot{x}_2$  les vitesses des masses.

– Une onde sonore incidente force la vitre 1 à osciller selon  $x_1(t) = A \cos(\omega t)$ .



3 - Donner l'expression de la force  $\vec{F}$  qu'exerce le ressort sur la masse 2, en fonction de  $l_0$ ,  $k$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  et du vecteur unitaire  $\vec{e}_x$ .

4 - Établir l'équation différentielle suivie par la position  $x_2(t)$  de la masse 2.

5 - On pose  $u_2(t) = x_2(t) - l_0$ . En partant de la question précédente, montrer que  $u_2(t)$  vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1, \quad (1)$$

avec  $\omega_0$  et  $Q$  des paramètres dont on donnera les expressions en fonction de  $m_2$ ,  $k$  et  $\alpha$ .

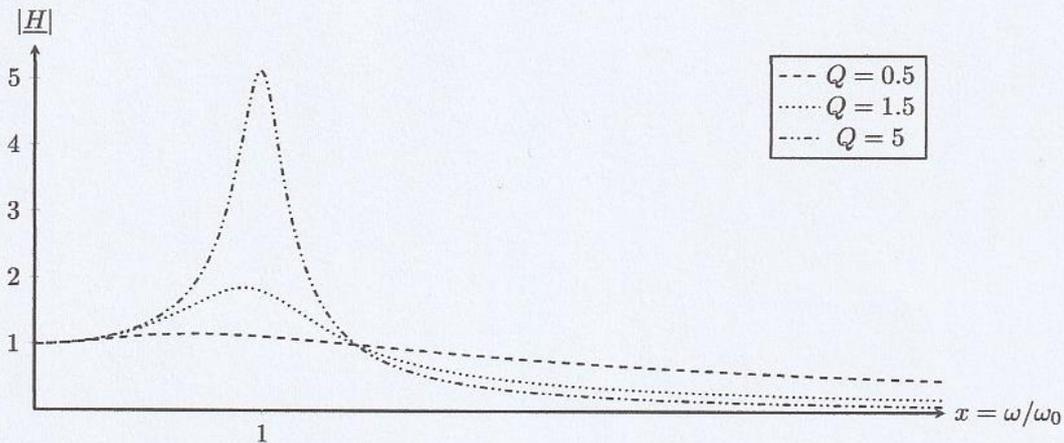
Dans la suite on travaille à partir de l'équation (1). On utilise le formalisme complexe, où une grandeur du type  $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$  est représentée par la grandeur complexe  $\underline{u}_2(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$  avec  $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$  l'amplitude complexe associée (où  $j^2 = -1$ ).

On voit l'ensemble du double vitrage comme un filtre de fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{\underline{u}_2}{\underline{x}_1}$ .

6 - Donner l'expression de  $\underline{H}$ , notamment en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

7 - Donner l'expression du gain  $G = |\underline{H}|$  du filtre.

On introduit la pulsation réduite  $x = \omega/\omega_0$ . Le graphique ci-dessous montre l'évolution de  $|\underline{H}|$  en fonction de  $x$  pour différentes valeurs de  $Q$ .



8 - Comment s'appelle le phénomène qui se manifeste ici par un maximum marqué sur la courbe de gain ?

9 - On souhaite obtenir la position du maximum de la courbe  $|\underline{H}|(x)$ . Pour les valeurs élevées de  $Q$  qui nous concernent ici, le numérateur de  $|\underline{H}|$  ne varie pas beaucoup autour du maximum. Le maximum est donc atteint lorsque le dénominateur est minimum.

On admet que ce dénominateur s'écrit  $D(x) = \sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q^2}$ .

Établir, en suivant la démarche décrite ici, la position  $x$  du maximum de  $|\underline{H}|(x)$  en fonction de  $Q$ . Indiquer également à quelle condition sur  $Q$  ce maximum existe.

10 - Montrer que si  $Q$  est assez grand (de l'ordre de 10 par exemple), alors la position de ce maximum correspond à  $\omega \simeq \omega_0$ .

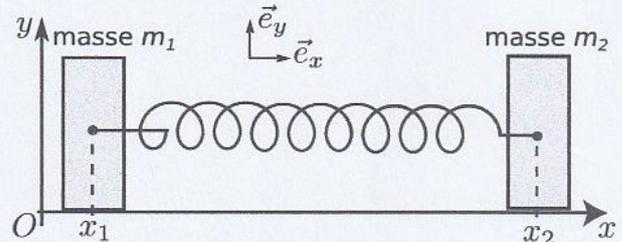
### I.3 Détermination plus fine de la fréquence de résonance

Les questions qui précèdent expliquent la présence de la baisse d'atténuation du double vitrage à basses fréquences : pour ces fréquences, l'ensemble vitre-air-vitre entre en résonance et laisse passer l'onde sonore. Nous avons montré que la pulsation de résonance est donnée (quasiment) par la pulsation propre  $\omega_0$  du système.

Notre expression de  $\omega_0$  n'est toutefois pas correcte, car elle ne prend en compte que la masse de la seconde vitre. Or celle de la première doit aussi intervenir, car sa mise en mouvement par l'onde sonore incidente en dépend.

Pour obtenir la bonne expression, il faut déterminer la pulsation des oscillations d'un système masse 1-ressort-masse 2 en oscillations libres. On considère donc un tel système.

On note  $l = x_2 - x_1$  la longueur du ressort et  $l_0$  sa longueur à vide. Il est initialement comprimé d'une quantité  $\delta$  :  $l(t=0) = l_0 - \delta$ , puis il est relâché sans vitesse initiale à  $t = 0$ . On néglige ici toute force de frottement et on ne considère que l'action du ressort, du poids et de la réaction normale du support sur les masses.



11 - Établir l'équation différentielle suivie par la position  $x_1(t)$  de la masse  $m_1$ , puis celle suivie par la position  $x_2(t)$  de la masse 2.

12 - En déduire une équation différentielle portant sur la longueur  $l(t)$ .

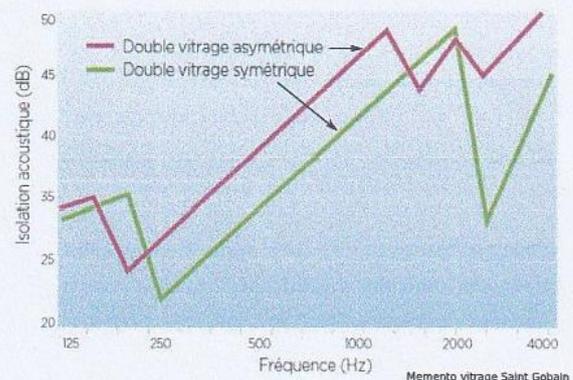
13 - En déduire l'expression de la pulsation  $\omega_0$  des oscillations en fonction de  $m_1$ ,  $m_2$  et  $k$ .

14 - Établir la solution  $l(t)$  de cette équation différentielle.

C'est cette pulsation qui correspond à la résonance d'un double vitrage. On trouve en effet dans les guides acoustiques la formule suivante pour la fréquence de résonance :  $f_r = 84 \times \sqrt{\frac{1}{d} \left( \frac{1}{m'_1} + \frac{1}{m'_2} \right)}$  avec  $f_r$  la fréquence en hertz,  $d$  la distance entre les vitres en mètres (dont dépend la raideur du ressort équivalent), et  $m'_1$  et  $m'_2$  les masses surfaciques des vitrages en  $\text{kg/m}^2$ .

15 - Si on souhaite envoyer le pic de résonance vers les basses fréquences hors du domaine de l'audible, que faut-il faire concernant les masses des vitres ?

16 - Revenons sur le problème du creux d'atténuation vers  $f \approx 3000$  Hz. Cette fréquence critique est inversement proportionnelle à l'épaisseur de la vitre. La courbe ci-dessous représente schématiquement l'atténuation d'un double vitrage asymétrique (vitres de 4 mm et 8 mm). Expliquez pourquoi les creux d'atténuation liés aux fréquences critiques sont plus faibles.



## II. Comportement thermique d'une habitation

Dans cette partie, on s'intéresse à l'isolation thermique d'une maison. On décrit l'habitation en la décomposant en trois systèmes : le milieu extérieur, l'intérieur et les murs :

- L'intérieur est de l'air de capacité thermique à pression constante  $C_1$ .
- Les murs sont de capacité thermique à pression constante  $C_2$ .
- On note  $R_1$  la résistance thermique de l'ensemble de l'isolant placé à l'intérieur de la maison, contre les murs.
- On note  $R_2$  la résistance thermique de l'ensemble de l'isolant placé à l'extérieur de la maison, contre les murs.

La maison est soumise à l'influence de la température extérieure que nous supposons sinusoïdale, résultant de l'alternance jour-nuit. La température extérieure varie avec une période de 24 h selon :

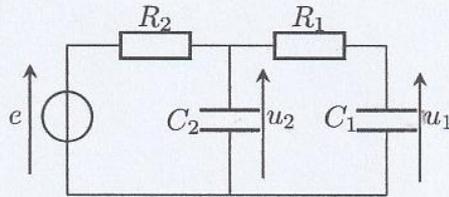
$$T_e(t) = T_{e,moyen} + \Delta T_0 \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

23 - Donner la valeur numérique de la pulsation  $\omega$ .

On admet que le problème thermique étudié est mathématiquement équivalent à l'étude du circuit électrique ci-dessous, où :

- le générateur  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$  représente  $T_e(t) - T_{e,moyen} = \Delta T_0 \cos \omega t$ ,
- la tension  $u_1(t)$  représente la différence entre  $T_1(t)$  et sa valeur en régime stationnaire,
- la tension  $u_2(t)$  représente la différence entre  $T_2(t)$  et sa valeur en régime stationnaire.

La capacité  $C_1$  représente l'intérieur de la maison, qui se "charge" et se "décharge" à mesure que son énergie interne augmente ou diminue. De même pour  $C_2$  qui représente les murs.



On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation  $\omega$ . La tension  $u_1(t) = U_{10} \cos(\omega t + \varphi)$  est représentée par  $\underline{u}_1(t) = U_{10} e^{j(\omega t + \varphi)}$  où  $j^2 = -1$ .

24 - On note  $\underline{Z}_{\text{éq}}$  l'impédance équivalente à l'ensemble  $C_2$ ,  $R_1$  et  $C_1$ . Donner son expression en fonction de  $\omega$ ,  $C_2$ ,  $R_1$  et  $C_1$ .

25 - Lorsqu'on considère une impédance  $\underline{Z}_1$  et une impédance  $\underline{Z}_2$  en dérivation, et que  $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$ , quelle approximation sur l'impédance équivalente à l'ensemble peut-on faire ? On attend une justification.

26 - Pour la suite, comme  $C_2 \gg C_1$ , on admet que  $\underline{Z}_{\text{éq}} \approx \frac{1}{jC_2\omega}$ .

En utilisant cette approximation, montrer que  $\underline{H} = \frac{u_1}{e}$  peut s'écrire  $\underline{H} = \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$  avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  des pulsations à exprimer en fonction des capacités et résistances.

27 - Donner l'expression du gain en décibel de ce filtre en fonction de  $\omega$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

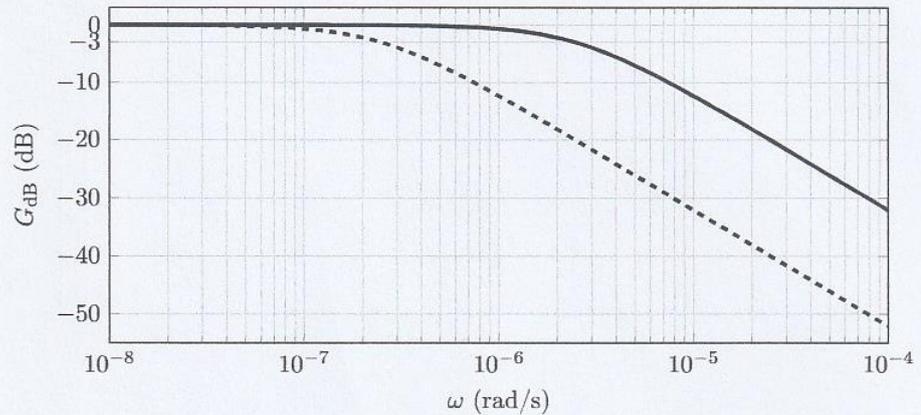
28 - Donner la pente des asymptotes haute et basse fréquence du diagramme de Bode en amplitude.

29 - Donner l'expression du déphasage entre  $u_1(t)$  et  $e(t)$ . Donner sa valeur pour  $\omega$  petit et pour  $\omega$  grand.

On obtient les valeurs numériques suivantes :

- Cas d'une isolation par l'intérieur :  $\omega_1 = 2,5 \times 10^{-6}$  rad/s et  $\omega_2 = +\infty$ .
- Cas d'une isolation par l'extérieur :  $\omega_1 = +\infty$  et  $\omega_2 = 2,5 \times 10^{-7}$  rad/s.

Les deux diagrammes de Bode en amplitude, l'un correspondant à l'isolation par l'intérieur et l'autre à l'isolation par l'extérieur, sont tracés ci-contre.



- 30** - Identifier les deux courbes : laquelle correspond à l'isolation par l'intérieur et laquelle correspond à l'isolation par l'extérieur ?
- 31** - On suppose une amplitude  $\Delta T_0 = 10^\circ\text{C}$  pour la variation de température extérieure, ce qui dans notre analogie électrique se traduit par une amplitude  $E_0 = 10\text{ V}$  pour le signal  $e(t)$ .  
On considère le cas d'une isolation par l'intérieur. En vous aidant du diagramme de Bode, et en arrondissant à la dizaine la plus proche la valeur de  $G_{dB}$ , donner la valeur de l'amplitude  $U_{10}$  de  $u_1(t)$ .
- 32** - Faire de même pour le cas de l'isolation par l'extérieur, et conclure sur l'avantage de celle-ci.
- 33** - Dans les deux cas (isolation intérieure ou extérieure), l'argument de la fonction de transfert vaut environ  $-\pi/2$  pour la pulsation considérée ici.  $u_1(t)$  est-il en avance ou en retard par rapport à  $e(t)$  ? De quelle fraction de période ? Traduire ceci en heures.