

Problème 1: Etude de bobines...

Exercice 1 : Décharge d'un condensateur dans une bobine

1. En appelant i l'intensité traversant la bobine orientée en convention récepteur, on a : $u = ri + L \frac{di}{dt}$ et $i = -C \frac{du}{dt}$ (convention générateur pour le condensateur).

Il vient donc $LC \frac{d^2u}{dt^2} + rC \frac{du}{dt} + u = 0$, équation qui se met sous la forme canonique :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0 \text{ en posant } \omega_0^2 = \frac{1}{LC} \text{ et } \frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L}.$$

D'où : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}.$

2.1. Le régime est pseudo-sinusoidal à condition que $Q > \frac{1}{2}$, c'est à dire $r < 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$

2.2. Dans le cas d'un régime pseudo-sinusoidal, l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle admet les racines complexes $-\lambda \pm i\Omega.$

On a donc : $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$

La pseudo-période des oscillations s'écrit alors : $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}.$

T se confond donc avec la période propre T_0 du circuit non amorti si $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$, soit $Q \gg \frac{1}{2}.$

En pratique cette condition est réalisée avec une erreur relative inférieure à 1% dès que $Q > 5$

2.3. La fonction $\cos(\Omega t + \phi)$ étant de période T, on a : $\frac{u(t)}{u(t+T)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+T)}} = e^{-\lambda T}$

D'où le décrement logarithmique : $\delta = \lambda T = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{\rho}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$

Dans le cas d'un circuit très faiblement amorti, on a $Q \gg 1$ et la relation générale ci-dessus se simplifie en $\delta \approx \frac{\rho}{Q}.$

3.1. A l'aide de l'écart entre le premier et le cinquième maximum, on obtient pour la pseudo-période : $T = \frac{6,2}{4} = 1,55 \text{ ms}.$

Le rapport du premier et du cinquième maximum donne $4\delta = \ln \frac{3,52}{0,845} = 1,43$, soit $\delta = 0,36.$

3.2. D'après la question 2.3, on obtient alors : $Q = 8,7.$

On peut faire l'approximation que $T_0 = T$, d'où : $\omega_0 = \frac{2\rho}{T_0} = 4,1.10^3 \text{ rad.s}^{-1}.$

On en déduit la valeur de l'inductance de la bobine : $L = \frac{1}{C\omega_0^2} = \frac{T_0^2}{4\rho^2 C} = 0,12 \text{ H}.$

On obtient alors : $r = \frac{L W_0}{Q} = 57 \Omega$.

4.1. En appelant maintenant i_B l'intensité traversant la bobine (toujours orientée en convention récepteur), les équations du circuit deviennent :

$$u = r i_B + L \frac{d i_B}{dt} \text{ et } i = -C \frac{du}{dt} = i_B + \frac{u}{R}$$

Il vient alors $u = -r(C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R}) - LC \frac{d^2 u}{dt^2} - \frac{L}{R} \frac{du}{dt}$, soit encore :

$$LC \cdot \left(\frac{d^2 u}{dt^2} \right) + \left(\frac{L}{R} + rC \right) \cdot \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R} \right) \cdot u = 0$$

4.2. La pulsation propre du circuit est maintenant donnée par :

$$\omega_0^2 = \frac{1 + \frac{r}{R}}{LC} = \frac{1}{LC}$$

puisque $r \ll R$. La présence de la carte d'acquisition est donc sans influence sur la valeur que l'on pourra mesurer pour ω_0 .

4.3.a. Le facteur de qualité Q' vérifie maintenant $\frac{W_0}{Q\Phi} = \frac{1}{RC} + \frac{r}{L}$, d'où l'on tire :

$$Q' = \frac{L \cdot \omega_0}{r \cdot \left(1 + \frac{L}{r \cdot R \cdot C} \right)} = \frac{Q}{1 + \frac{L}{r \cdot R \cdot C}}$$

On retrouve donc la valeur de Q trouvée question 1 à condition que $RC \gg \frac{L}{r}$.

4.3.b. Avec la valeur choisie pour C , $RC = 0,25$ s et, pour la bobine étudiée, $\frac{L}{r} = 2,1$ ms. Le critère précédent est donc vérifié et la perturbation due à la carte est bien négligeable.

Exercice 2: Etude d'une bobine

Mesure en régime continu

1.1. En régime continu, l'inductance se comporte comme un fil et la bobine est donc équivalente à la résistance r .

1.2. On a un diviseur de tension, d'où $U_R = \frac{R}{R+r+r_0} E_0$. Il vient donc :

$$r = R \cdot \left(\frac{E_0}{U_R} - 1 \right) - r_0$$

Numériquement : $r = 29 \Omega$.

Mesures en régime sinusoïdal

2. Mesures à l'aide d'un multimètre

2.1. En modélisant la bobine par une inductance pure, celle-ci étant parcourue par la même intensité

que la résistance, on a : $\frac{U_B}{U_R} = \frac{Z_B}{Z_R} = \frac{L\omega}{R}$, ce qui donne $L\omega = 108 \Omega$.

On en déduit $L = 6,85 \cdot 10^{-2} \text{ H}$.

En notant I l'intensité efficace dans le circuit, la tension efficace U_e aux bornes du générateur vaudrait alors : $U_e = ZI = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2} I = \sqrt{U_R^2 + U_B^2} = \boxed{8,61 \text{ V}}$.

2.2. D'après le résultat de la question 2.1, la valeur de l'impédance de la bobine est $\boxed{Z_B = 108 \Omega}$.

On obtient de même pour l'impédance totale du circuit : $Z = R \frac{U_e}{U_R} = \boxed{125 \Omega}$.

2.3. On a : $r^2 + (L\omega)^2 = Z_B^2$ et $r^2 + R^2 + 2Rr + (L\omega)^2 = Z^2$

On en tire $r = \frac{Z^2 - Z_B^2 - R^2}{2R}$. Numériquement : $\boxed{r = 28 \Omega}$

On obtient alors : $L = \frac{\sqrt{Z_B^2 - r^2}}{\omega} = \boxed{6,64 \cdot 10^{-2} \text{ H}}$.

3.1. D'après l'oscillogramme on a les amplitudes $\boxed{U_{em} = 5,0 \text{ V}}$ et $\boxed{U_{Rm} = 2,5 \text{ V}}$.

L'intensité du courant a donc pour amplitude: $I_m = \frac{U_{Rm}}{R} = \boxed{63 \text{ mA}}$.

3.2. L'impédance complexe du dipôle AM s'écrit: $\underline{z} = r + R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$.

D'après les résultats de la question précédente, $Z = \frac{U_{em}}{I_m} = \boxed{80 \Omega}$.

3.3. La tension $u_e(t)$ passe par son maximum avant $u_R(t)$. $u_e(t)$ est donc en avance de phase par rapport à $u_R(t)$.

L'avance temporelle de $u_e(t)$ correspond à 1 carreau sur l'oscillogramme, alors que la période est représentée par 12 carreaux.

Le déphasage entre $u_e(t)$ et $u_R(t)$ vaut donc: $\boxed{\varphi = \frac{2\rho}{12} = \frac{\rho}{6}}$.

3.4. On a $\varphi = \arg \underline{z}$, donc $\underline{z} = Z \cos \varphi + j Z \sin \varphi$.

Par identification avec l'expression de la question 3.2, on obtient: $R + r = Z \cos \varphi$ et

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = Z \sin \varphi.$$

D'où les expressions de r et L : $\boxed{r = Z \cos \varphi - R}$; $\boxed{L = \frac{1}{\omega} \left(Z \sin \varphi + \frac{1}{C\omega} \right)}$

3.5. A.N : $\boxed{r = 29 \Omega \text{ et } L = 66 \text{ mH}}$.

Les valeurs obtenues sont bien conformes aux résultats trouvés dans les questions précédentes.

Problème 2: Isolation thermique et acoustique

I. Double vitrage et isolation acoustique

1) Domaine des ondes sonores audible par l'homme : $20 \text{ Hz} < f < 20 \text{ kHz}$.

2) Le minimum d'atténuation (ce qui correspond à un maximum de transmission) observé au voisinage de 3000 Hz est probablement dû à un phénomène de résonance (sur une vitre d'épaisseur $e = 4 \text{ mm}$).

3) La force exercée par le ressort sur la masse 2 est donnée par la loi de Hooke :

$$\vec{F} = -k \cdot (l(t) - l_0) \cdot \vec{e}_x$$

avec $l(t) = x_2(t) - x_1(t)$:

$$\vec{F} = -k \cdot (x_2(t) - x_1(t) - l_0) \cdot \vec{e}_x$$

4) On assimile la masse m_2 à un point matériel observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces : le poids et la réaction du support (qui se compensent), la force $\vec{f}$ exercée par l'amortisseur et la force $\vec{F}$ exercée par le ressort. Appliquons le principe fondamental de la dynamique : $m_2 \cdot \vec{a} = \vec{f} + \vec{F}$. En explicitant, puis en projetant sur $\vec{e}_x$:

$$m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -\alpha \cdot (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - k \cdot (x_2(t) - x_1(t) - l_0)$$

5) On pose : $u_2(t) = x_2(t) - l_0$; on en déduit que $\dot{u}_2 = \dot{x}_2$ et $\ddot{u}_2 = \ddot{x}_2$. On établit que :

$$m_2 \cdot \ddot{u}_2 = -\alpha \cdot (\dot{u}_2 - \dot{x}_1) - k \cdot (u_2 - x_1)$$

En divisant par m_2 :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\alpha}{m_2} \dot{u}_2 + \frac{k}{m_2} u_2 = \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k}{m_2} x_1$$

Posons :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m_2 \cdot \omega_0}{\alpha}$$

On vérifie que :

$$\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 \cdot u_2 = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 \cdot x_1$$

6) En adoptant les notations complexes, l'équation différentielle précédente devient :

$$\ddot{\underline{u}}_2(t) + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{u}}_2(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{u}_2(t) = \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{x}}_1(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{x}_1(t)$$

En explicitant les dérivées :

$$-\omega^2 \cdot \underline{u}_2(t) + \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q} \cdot \underline{u}_2(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{u}_2(t) = \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q} \cdot \underline{x}_1(t) + \omega_0^2 \cdot \underline{x}_1(t)$$

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q} \right) \cdot \underline{u}_2(t) = \left(\omega_0^2 + \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q} \right) \cdot \underline{x}_1(t)$$

On établit l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{H}(j \cdot \omega) = \frac{\omega_0^2 + \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{j \cdot \omega \cdot \omega_0}{Q}}$$

7) Module de la fonction de transfert :

$$G = |\underline{H}| = \frac{\sqrt{(\omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega \cdot \omega_0}{Q}\right)^2}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \left(\frac{\omega \cdot \omega_0}{Q}\right)^2}}$$

8) On observe un phénomène de **résonance** (d'élongation).

9) La fonction $G(x)$ admet un maximum quand la fonction $D(x)$ est minimale. Pour identifier ce minimum, dérivons cette fonction :

$$\frac{dD(x)}{dx} = \frac{1}{2} \frac{1}{D(x)} \left(-4 \cdot x + 4 \cdot x^3 + \frac{2 \cdot x}{Q^2} \right)$$

$$\frac{dD(x)}{dx} = 0 \quad \text{pour} \quad 4 \cdot x \cdot \left(-1 + x^2 + \frac{1}{2 \cdot Q^2} \right) = 0$$

Quel que soit le facteur de qualité, on observe une tangente horizontale en $x = 0$ (ceci est vérifié sur la courbe fournie) et la fonction $G(x)$ admet un maximum si et seulement $Q > 1/\sqrt{2}$ pour :

$$x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2 \cdot Q^2}}$$

10) On peut noter que pour les grandes valeurs de Q : $x_r = 1$. Dans ce cas, le maximum est effectivement observé pour $\omega_r = \omega_0$.

11) En appliquant le principe fondamental de la dynamique à chacune des masses dans le référentiel terrestre supposé galiléen, puis en projetant sur $\vec{e}_x$ on établit que :

- Pour la masse m_1 : $m_1 \cdot \ddot{x}_1 = k \cdot (l(t) - l_0)$ (1)

- Pour la masse m_2 : $m_2 \cdot \ddot{x}_2 = -k \cdot (l(t) - l_0)$ (2)

12) Avec $l(t) = x_2 - x_1$ et $\ddot{l} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$; en faisant (2) – (1) on établit que :

$$\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -k \cdot \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \cdot (l(t) - l_0) = \ddot{l}$$

Soit l'équation différentielle vérifiée par $l(t)$:

$$\ddot{l} + k \cdot \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \cdot l = k \cdot \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \cdot l_0$$

13) On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique du type :

$$\ddot{l} + \omega_0^2 \cdot l = \omega_0^2 \cdot l_0$$

avec ω_0 pulsation propre donnée par :

$$\omega_0 = \sqrt{k \cdot \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right)}$$

14) La solution de cette équation différentielle est du type :

$$l(t) = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + l_0$$

où A et B sont des constantes définies par des conditions initiales :

$$\begin{cases} l(0) = l_0 - \delta \\ \dot{l}(0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$l(t) = -\delta \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + l_0$$

15) Pour abaisser la fréquence du pic de résonance, il faut **augmenter les masses** des vitres...

16) Le double vitrage asymétrique limite la résonance, les creux d'atténuation sont donc plus faibles.

II. Comportement thermique d'une habitation

23) Pulsation de la variation thermique : $\omega = 2 \cdot \pi / T = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

24) On note $Z_{\text{éq}}$ l'impédance équivalente à l'ensemble C_2, R_1 et C_1 :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\acute{e}q}} = j \cdot C_2 \cdot \omega + \frac{1}{R_1 + \frac{1}{j \cdot C_1 \cdot \omega}}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\acute{e}q}} = j \cdot C_2 \cdot \omega + \frac{j \cdot C_1 \cdot \omega}{1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega} = \frac{j \cdot C_2 \cdot \omega \cdot (1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega) + j \cdot C_1 \cdot \omega}{1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega}$$

$$\underline{Z}_{\acute{e}q} = \frac{1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega}{j \cdot C_1 \cdot \omega + j \cdot C_2 \cdot \omega - R_1 \cdot C_1 \cdot C_2 \cdot \omega^2}$$

25) Avec :

$$\frac{1}{\underline{Z}_{\acute{e}q}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$$

Si $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$ alors $1/|\underline{Z}_1| \ll 1/|\underline{Z}_2|$ et on peut faire l'hypothèse que $\underline{Z}_{\acute{e}q} = \underline{Z}_2$.

26) En utilisant la relation du diviseur de tension, on établit que :

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_{\acute{e}q} \cdot \underline{e}}{\underline{Z}_{\acute{e}q} + R_2}$$

En faisant l'hypothèse que $\underline{Z}_{\acute{e}q} = \underline{Z}_2$:

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2 \cdot \underline{e}}{\underline{Z}_2 + R_2}$$

En explicitant :

$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{e}}{1 + j \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot \omega}$$

Connaissant $\underline{u}_2$, la tension $\underline{u}_1$ est donnée par la relation du diviseur de tension. De la même manière, on établit que :

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{u}_2}{1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega}$$

En explicitant $\underline{u}_2$:

$$\underline{u}_1 = \frac{\underline{e}}{(1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega)(1 + j \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot \omega)}$$

On établit ainsi que :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} = \frac{1}{(1 + j \cdot R_1 \cdot C_1 \cdot \omega)(1 + j \cdot R_2 \cdot C_2 \cdot \omega)}$$

Si on pose que :

$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 \cdot C_1} \quad \text{et} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 \cdot C_2}$$

On vérifie que :

$$\underline{H} = \frac{1}{\left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j \cdot \frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

27) Le gain a pour expression :

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right)}}$$

Gain en décibels :

$$G_{dB} = 20. \log G(\omega) = -20. \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right) \cdot \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right)}$$

28) A basse fréquence : $G_{dB} = 0$, asymptote horizontale. A haute fréquence : $G_{dB} = -40. \log \omega + 20. \log(\omega_1. \omega_2)$, pente de -40 dB/déc.

29) Posons $\underline{H} = \underline{H}_1. \underline{H}_2$. Si on note $\varphi(\omega)$ le déphasage de $\underline{u}_1$ par rapport à $\underline{e}$ alors :

$$\varphi(\omega) = \arg \underline{H} = \arg \underline{H}_1 + \arg \underline{H}_2 = -\arg\left(1 + j. \frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arg\left(1 + j. \frac{\omega}{\omega_2}\right)$$

A basse fréquence : $\varphi(\omega) = 0$. A haute fréquence : $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi$

30) Cas d'une isolation par l'intérieur : $\omega_1 = 2,5. 10^{-6}$ rad. s^{-1} et $\omega_2 = +\infty$ donc le gain en décibel se ramène à :

$$G_{dB} = 20. \log G(\omega) = -20. \log \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)}$$

Pour $\omega = \omega_1 = 2,5. 10^{-6}$ rad. s^{-1} : $G_{dB} = -3,0$ dB, l'isolation par l'intérieur est la courbe **en trait continu**.

Pour l'isolation par l'extérieur, on établit une expression similaire et on vérifie que l'isolation par l'extérieur correspond bien à la courbe en pointillés.

31) Sachant que $\omega = 7,3. 10^{-5}$ rad. s^{-1} , pour une isolation par l'intérieur (diag. de Bode en trait continu) le gain en décibel est environ $G_{dB} = -30$ dB (lecture délicate !). On en déduit que :

$$|\underline{H}| = \frac{U_{10}}{E_0} = 10^{-\frac{30}{20}} = 0,032$$

Soit :

$$U_{10} = 0,32 \text{ V}$$

32) Pour une isolation par l'extérieur (diag. de Bode en pointillés), de la même manière on établit que $G_{dB} = -50$ dB donc :

$$|\underline{H}| = \frac{U_{10}}{E_0} = 10^{-\frac{50}{20}} = 0,0032$$

$$U_{10} = 0,032 \text{ V}$$

On peut noter qu'une isolation par l'extérieur est beaucoup plus efficace qu'une isolation par l'intérieur (ce qui était prévisible...).

33) Dans les deux cas, $u_1(t)$ est en quadrature retard par rapport à $e(t)$, ce qui correspond à un quart de période et une durée ou une durée de 6 heures.