

Durée de l'épreuve : 3h

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

### Problème : étude et applications de matériaux piézoélectriques

Les matériaux piézoélectriques ont la capacité de voir apparaître une différence de potentiel entre leurs faces lorsqu'on exerce sur elles une contrainte (effet direct) mais également de pouvoir se déformer sous l'action d'une différence de potentiel imposée (effet inverse) ce qui en fait des matériaux très intéressants sur le plan des applications. On propose ici d'étudier différentes utilisations de ces matériaux. **Les quatre parties de ce problème sont indépendantes.**

#### I. Utilisation en capteur de forces

Les montages ci-après utilisent des amplificateurs linéaires intégrés (ALI) supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire.

##### I.A : Mesure de l'intensité d'une force s'exerçant sur une lame piézoélectrique

On suppose qu'une force  $F$  régulièrement répartie est exercée sur la face de la lame (cf figure 1), celle-ci entraînant l'apparition d'une tension  $V_e$  à ses bornes et de deux charges  $+q$  et  $-q$  sur les faces de la lame. La charge  $q$  est liée à  $V_e$  ainsi qu'à la force  $F$  exercée de sorte que  $q = C \cdot V_e = K \cdot F$  où  $C, K$  et  $F$  représentent une capacité, une constante de proportionnalité et l'intensité de la force  $F$ .

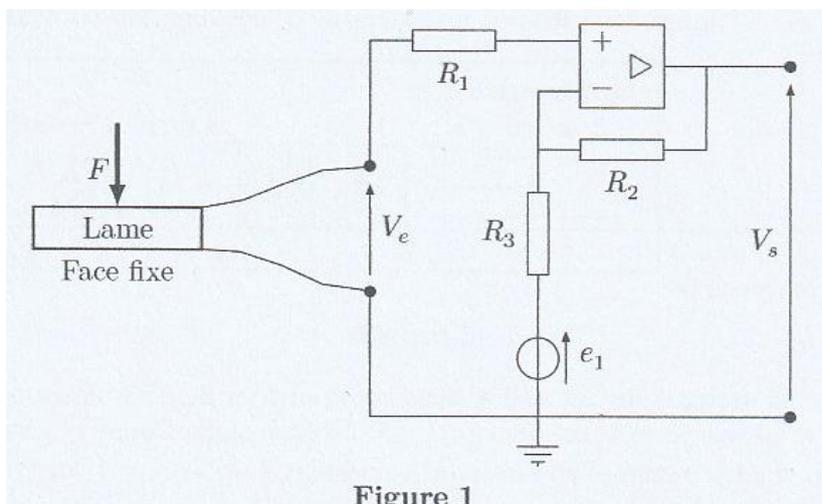


Figure 1

**Q 1.** Après avoir rappelé le modèle de l'amplificateur linéaire intégré idéal, montrer que la tension d'entrée  $V_e$  vérifie la relation :

$$V_e = \frac{R_2 \cdot e_1 + R_3 \cdot V_s}{R_2 + R_3}$$

**Application numérique :**

**Q 2.** On donne  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$  ;  $R_2 = 6,5 \text{ k}\Omega$  ;  $R_3 = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $e_1 = 0,10 \text{ V}$ . On mesure  $V_s = 6,5 \text{ V}$ . Calculer  $V_e$ .

**Q 3.** Sachant que  $C = 8,0 \cdot 10^{-13} \text{ F}$  et que  $K = 1,0 \cdot 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{N}^{-1}$ , déterminer l'intensité de la force  $F$  s'exerçant sur la lame.

##### I.B : Mesure de la fréquence d'une force excitatrice sinusoïdale s'exerçant sur la lame

On considère que la lame est soumise à une action mécanique variant sinusoïdalement dans le temps à la fréquence  $f$ , fréquence que l'on se propose de déterminer à l'aide du montage de la figure 2.

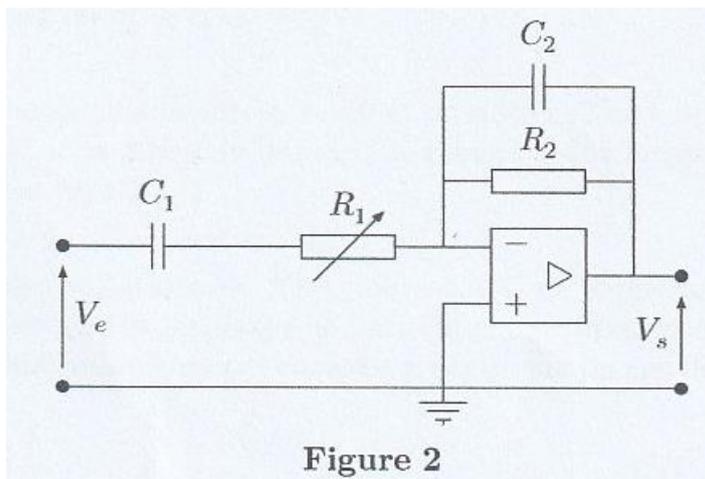


Figure 2

Q 4. Déterminer l'expression de la fonction de transfert du filtre de la figure 2 et la mettre sous la forme :

$$\underline{H}(j. \omega) = - \frac{A}{1 + j. \left( \frac{\omega}{\omega_1} - \frac{\omega_2}{\omega} \right)}$$

en précisant les expressions de  $A$ ,  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en fonction de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $C_1$  et  $C_2$ .

Q 5. Indiquer en justifiant, quelle est la nature de ce filtre.

Q 6. Montrer que le gain passe par un maximum pour une pulsation  $\omega$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega_1$  et  $\omega_2$ .

On ajuste la résistance  $R_1$  de manière à ce que les signaux d'entrée et de sortie soient en opposition de phase.

Q 7. Comment peut-on vérifier expérimentalement que les deux signaux sont en opposition de phase ? Indiquer quel matériel peut être utilisé pour cette opération et comment le relier au montage.

Q 8. Déterminer la fréquence de la contrainte s'exerçant sur la lame. Calculer sa valeur numérique sachant que  $R_2 = 1,0 \cdot 10^2 \text{ k}\Omega$  ;  $C_1 = 50 \text{ nF}$  ;  $C_2 = 5,0 \text{ nF}$  et qu'il a fallu régler  $R_1$  à  $10 \text{ k}\Omega$  de manière à ce que les deux signaux soient en opposition de phase.

## II. Utilisation d'un matériau piézoélectrique dans un airbag

On se propose dans cette partie d'analyser le principe de détection d'un choc conduisant au gonflage d'un airbag à l'aide d'un matériau piézoélectrique.

### II.A : Principe d'un accéléromètre

On considère une masse  $m$  susceptible de se déplacer par rapport à une voiture lors d'une phase de freinage, le référentiel lié à la voiture est non galiléen. L'ensemble est modélisé en figure 3.

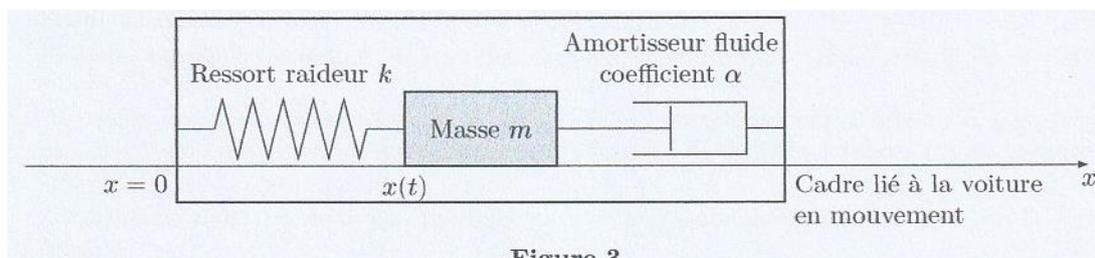


Figure 3

La masse  $m$  se déplace horizontalement et sans frottement solide sur un support lié à la voiture. Le ressort a une constante de raideur  $k$  et pour longueur à vide  $L_0$ . L'amortisseur exerce une force de frottement fluide sur la masse, son expression étant  $\vec{f} = -\alpha. \vec{V}$  où  $\vec{V}$  représente la vitesse de la masse dans le référentiel lié à la voiture. Le vecteur unitaire de l'axe des  $x$  orienté dans le sens des  $x$  positifs

est noté  $\vec{u}_x$ . Le référentiel lié à la voiture est animé de l'accélération  $\vec{a} = -a \cdot \vec{u}_x$  avec  $a > 0$  par rapport au référentiel terrestre considéré quant à lui comme galiléen.

**Q 9.** Effectuer le bilan des différentes forces s'exerçant sur la masse  $m$ . Pour tenir compte du caractère non galiléen du référentiel lié à la voiture, on admet que dans l'application du principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, il est nécessaire d'introduire une force supplémentaire (nommée force d'inertie d'entraînement) d'expression  $\vec{f}_{ie} = m \cdot a \cdot \vec{u}_x$ .

**Q 10.** En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le référentiel lié à la voiture, montrer que l'équation différentielle du mouvement en  $X(t) = x(t) - L_0$  peut être mise sous la forme :

$$\frac{d^2X}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dX}{dt} + \omega_0^2 \cdot X = a$$

en exprimant  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $m, k$  et  $\alpha$ .

### Résolution :

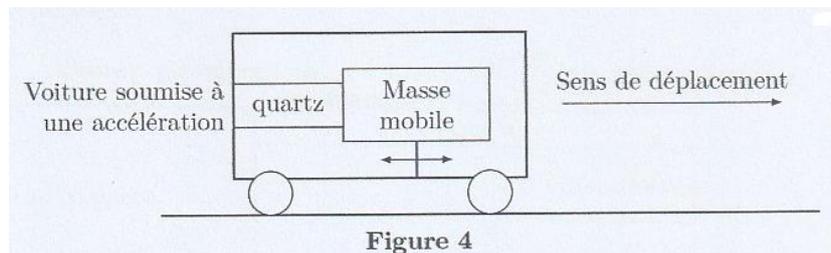
On suppose que la phase de freinage commence à  $t = 0$  et on note  $t_0$  l'instant correspondant à l'arrêt complet de la voiture. On suppose qu'avant la phase de freinage le ressort a une longueur égale à  $L_0$ . On s'intéresse au cas où le facteur de qualité  $Q$  est égal à  $1/2$ .

**Q 11.** Quelle est l'expression de  $X(t)$  pour  $t < 0$  ?

**Q 12.** Quelle est l'expression de  $X(t)$  pour  $0 < t < t_0$  ? Représenter l'allure des variations de  $X(t)$  pour tout  $t$  en supposant que le régime permanent a le temps de s'établir.

### II.B : Utilisation du matériau piézoélectrique

L'idée générale est que le matériau doit permettre la mesure de l'accélération d'une voiture qui va, au cours d'un choc, varier brutalement. On ne considèrera dans cette partie qu'un mouvement de translation rectiligne de la voiture.



Lors d'une variation de vitesse de la voiture, la masse mobile, soumise à la force d'inertie d'entraînement, va plus ou moins comprimer le cristal entraînant l'apparition d'une différence de potentiel entre ses deux faces. Le problème est de différencier un freinage brutal d'un choc. On va considérer deux cas avec l'hypothèse simplificatrice consistant à considérer que l'accélération de la voiture reste constante jusqu'à son arrêt complet.

#### Cas numéro 1 : Freinage brutal

La voiture roule à vitesse constante  $V = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  soit  $25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On suppose que la voiture s'arrête totalement après  $\Delta t = 2,5 \text{ s}$ .

**Q 13.** Calculer la valeur numérique de l'accélération moyenne durant la phase d'arrêt de la voiture.

#### Cas numéro 2 : Arrêt suite à un choc

On néglige la déformation de la voiture de sorte que l'ensemble du véhicule est animé de la même vitesse par rapport au sol à un instant donné. La voiture roule à la vitesse constante  $V = 90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  et on suppose qu'elle s'arrête totalement en  $\Delta t = 0,15 \text{ s}$ .

**Q 14.** Calculer la valeur numérique de l'accélération moyenne durant la phase d'arrêt de la voiture.

Le cristal de quartz utilisé a pour masse  $m = 2,8 \text{ g}$ . Il est caractérisé par la quantité  $\chi$  correspondant au rapport entre la tension apparaissant à ses bornes et l'intensité de la force à laquelle il est soumis. On donne ici :  $\chi = 6,0 \text{ V} \cdot \text{N}^{-1}$ .

**Q 15.** Déterminer dans les deux cas précédents la valeur numérique de l'intensité de la force d'inertie qui s'exerce sur le cristal de quartz.

**Q 16.** Déterminer dans les deux cas précédents la valeur numérique de la différence de potentiel qui apparaît aux bornes du cristal de quartz. La différence vous semble-t-elle décelable ?

**Q 17.** Les variations de la tension aux bornes de la lame sont analogues à celles de  $X(t)$  obtenues à la question 12, le facteur de qualité étant égal à  $1/2$ . Justifier le choix de ce coefficient et préciser quel serait le problème si le régime permanent n'était pas atteint entre  $t = 0$  et  $t_0$ .

### II.C : Détecteur de tension

On dispose d'un amplificateur linéaire intégré (alimenté en  $+15\text{ V}/-15\text{ V}$ ), d'une diode électroluminescente (LED) et de divers dipôles. La LED a une tension à ses bornes égale à  $U_d = 1,9\text{ V}$  lorsqu'elle éclaire et la puissance maximale qu'elle peut dissiper est égale à  $\mathcal{P}_{max} = 0,10\text{ W}$ . On supposera de plus que sa résistance interne est négligeable. Elle est symbolisée comme indiqué figure 5.

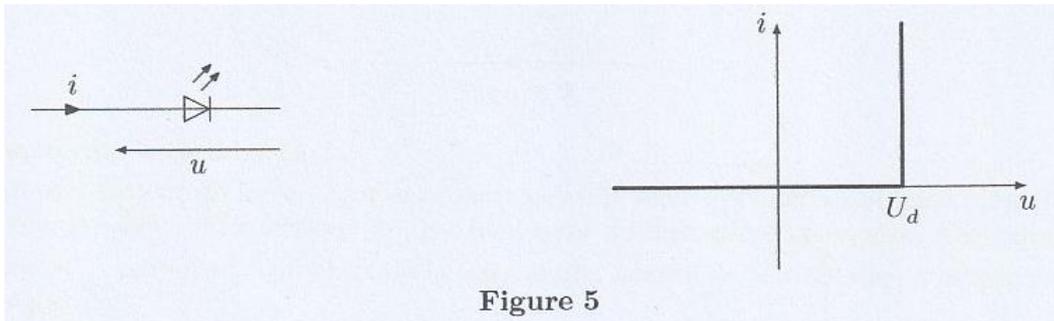


Figure 5

**Q 18.** Proposer un montage qui permettrait de faire briller la LED lorsque la tension aux bornes du quartz devient supérieure à une valeur limite, cette dernière permettant de différencier le cas d'un freinage brusque d'un choc. On indiquera la démarche et le choix des composants choisis. Cette question, significativement valorisée au niveau du barème, nécessite de faire preuve d'initiative.

## III. Microgénérateur piézoélectrique

Un élément piézoélectrique est collé à une « poutre » qui se met en mouvement sous l'effet de vibrations extérieures. L'éléments piézoélectrique transforme l'énergie récupérée en énergie électrique ce qui constitue une source autonome de puissance.

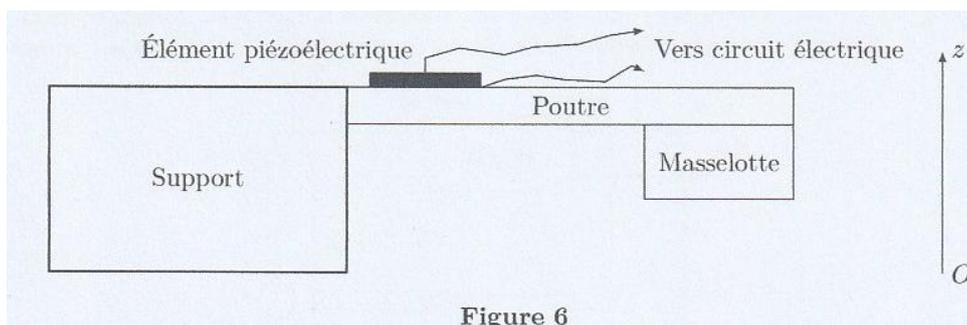


Figure 6

On appelle  $\vec{F}_E$  la force excitatrice ambiante supposée sinusoïdale :  $\vec{F}_E = F_E \cdot \vec{u}_z = F_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \vec{u}_z$ . On travaille dans un référentiel terrestre. On se place en régime sinusoïdal forcé.

### III.A : Modélisation mécanique de la poutre en régime forcé

Le déplacement vertical du centre d'inertie de la poutre peut être modélisé par l'équation mécanique :

$$M \frac{d^2 z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + k \cdot z = F_E$$

Q 19. Que représente le terme  $M \frac{d^2 z}{dt^2}$  ?

Q 20. Indiquer à quel type de forces correspondent  $-k \cdot z$  et  $-\alpha \frac{dz}{dt}$  ? Expliquer qualitativement quelles caractéristiques de la poutre sont modélisées par ces forces.

### III.B : Position et vitesse de la poutre

Q 21. On pose  $z(t) = \text{Re}(Z_m \cdot e^{i\omega \cdot t})$ . Exprimer  $Z_m$  amplitude complexe de la vibration mécanique suivant l'axe vertical ( $Oz$ ).

Dans toute la suite de cette partie III on se place à la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{k/M}$ .

Q 22. Décrire à cette pulsation le mouvement du centre d'inertie de la poutre.

Q 23. Dédire de ce qui précède l'expression de la vitesse de déplacement vertical  $v_z(t)$  du centre d'inertie de la poutre en fonction de  $F_0$ ,  $\alpha$ ,  $\omega_0$  et du temps.

### III.C : Modélisation électrique

La partie électrique du dispositif peut être modélisée de la façon suivante : une source de courant d'intensité  $\beta \cdot v_z$  est disposée en parallèle avec un condensateur de capacité  $C_0$  et une résistance d'utilisation  $R$ . Soit  $V$  la tension aux bornes de  $R$ . On veut montrer que la puissance moyenne récupérée par le dipôle d'utilisation est proportionnelle au carré de  $F_0$ .

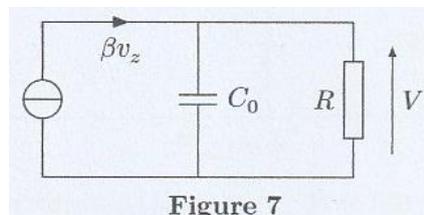


Figure 7

Q 24. Que représente la capacité  $C_0$  ?

Q 25.  $\beta$  est appelé facteur de force : c'est le rapport entre la force appliquée à la lame piézoélectrique et la tension aux bornes de celle-ci. Montrer que  $\beta \cdot v_z$  est homogène à l'intensité d'un courant électrique.

Q 26. Exprimer  $V_m$  amplitude complexe de la tension aux bornes de la résistance d'utilisation en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $F_0$ ,  $R$ ,  $C_0$  et  $\omega_0$ .

Q 27. En déduire l'expression de la puissance moyenne récupérée par la résistance d'utilisation.

## IV. Oscillateurs

On s'intéresse ici aux dispositifs résonateurs ou oscillateurs, ils sont capables de générer des oscillations à une fréquence qui leur est propre.

IV.A : Dans le circuit électrique d'oscillation est ajouté une « contre-réaction ». On va s'intéresser dans un premier temps au rôle de la contre-réaction. Le circuit étudié est représenté figure 8.

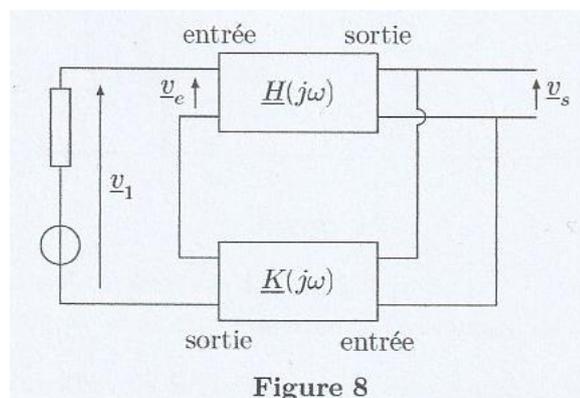


Figure 8

Le schéma du circuit peut prendre la forme de deux quadripôles de fonctions de transfert respectives  $\underline{H}(j, \omega)$  et  $\underline{K}(j, \omega)$  (définies comme le rapport des amplitudes complexes de la tension de sortie sur la tension d'entrée).

Donner les relations faisant intervenir les fonctions de transfert :

**Q 28.** entre  $\underline{v}_s$  et  $\underline{v}_e$ .

**Q 29.** entre  $\underline{v}_s$ ,  $\underline{v}_e$  et  $\underline{v}_1$ .

**Q 30.** En déduire la fonction de transfert globale du montage  $\underline{A}(j, \omega) = \underline{v}_s / \underline{v}_1$  en fonction de  $\underline{H}(j, \omega)$  et  $\underline{K}(j, \omega)$ .

A fréquence non nulle, l'ensemble représenté peut constituer un oscillateur si la tension de sortie est non nulle alors que la tension d'entrée  $v_1$  est nulle. En effet, le montage est alors capable de générer seul des oscillations.

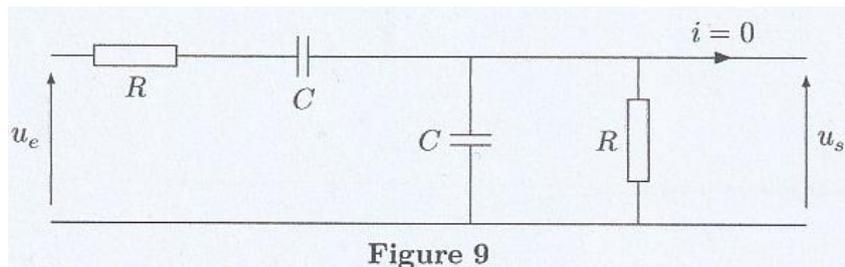
**Q 31.** Montrer que cette condition est vérifiée pour  $\underline{H}(j, \omega) \cdot \underline{K}(j, \omega) = -1$ .

En déduire deux relations :

**Q 32.** entre les gains  $H(j, \omega)$  et  $K(j, \omega)$  notée relation  $(R_1)$ .

**Q 33.** entre les phases  $\arg(\underline{H}(j, \omega))$  et  $\arg(\underline{K}(j, \omega))$  notée relation  $(R_2)$ .

**IV.B :** Dans cette sous-partie, on étudie le filtre de Wien dont on va voir après qu'il peut servir dans un montage oscillateur. Le filtre est constitué de deux condensateurs identiques de capacité  $C$  et de deux conducteurs ohmiques identiques de résistance  $R$ . Le circuit correspondant est représenté sur la figure 9.



**Q 34.** Par une étude asymptotique à basse et à haute fréquences, déterminer la nature du filtre de Wien.

**Q 35.** Déterminer la fonction de transfert  $\underline{K}(j, \omega) = \underline{u}_s / \underline{u}_e$ .

**Q 36.** Montrer que cette fonction de transfert peut s'exprimer sous la forme :

$$\underline{K}(j\omega) = \frac{A}{1 + j \cdot Q \cdot \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

où  $A, Q$  et  $\omega_0$  sont des constantes à déterminer. Cette fonction est elle-en accord avec le résultat de la question 34 ?

**Q 37.** Comment définit-on un phénomène de résonance ? Ce filtre est en résonance pour une pulsation particulière  $\omega_r$ . Donner l'expression de cette pulsation en fonction de  $R$  et  $C$  puis déterminer  $\underline{K}(j\omega)$  à la résonance ? Que peut-on dire du gain et du déphasage de  $u_s(t)$  par rapport à  $u_e(t)$  à la résonance ?

**Q 38.** Diagrammes de Bode en gain :

-a- On note  $K(\omega)$  le gain du filtre de Wien. Déterminer  $K(\omega)$  puis établissez les équations des asymptotes du gain en décibel à basse et à haute fréquence.

-b- Représenter le diagramme de Bode du gain en décibel sur le papier gradué en échelle logarithmique fourni en document annexe (on indiquera la fréquence à la résonance, le gain maximal en décibel et les asymptotes à basse et à haute fréquences).

**IV.C :** Le filtre de Wien est inséré dans le montage de la figure 10, on supposera que l'amplificateur linéaire intégré est idéal et fonctionne en régime linéaire. On choisit de se placer à la pulsation  $\omega_0 = 1/(R \cdot C)$ . Les notations employées sont volontairement similaires à celles de la figure 8.

- Q 39.** Exprimer uniquement en fonction de  $R$ , l'impédance complexe de la branche où  $R$  et  $C$  sont en série.
- Q 40.** Même question pour  $R$  et  $C$  en parallèle.
- Q 41.** Que vaut le rapport  $\underline{v}/\underline{v}_s$  ? Commenter par rapport à l'étude faite en IV.B.
- Q 42.** Exprimer la différence de potentiel  $\underline{v}$  en fonction de  $\underline{v}_e$  ;  $\underline{v}_s$  ;  $R_1$  et  $R_2$ .

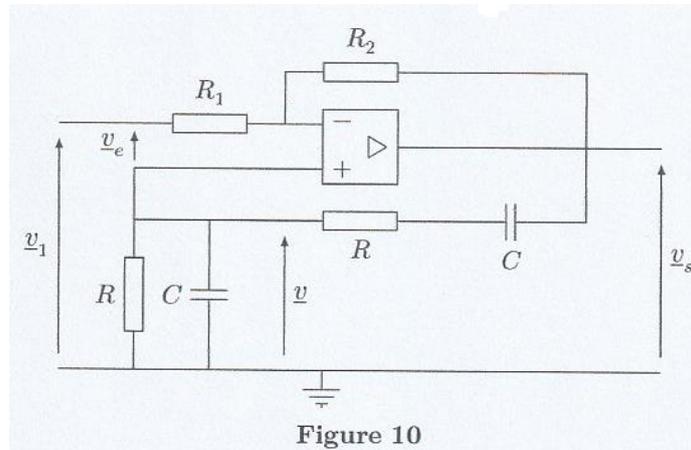


Figure 10

- Q 43.** Déterminer l'expression de la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega_0)$  (on rappelle que  $\underline{H}(j\omega) = \underline{v}_s/\underline{v}_e$ ).
- Q 44.** Proposer des valeurs de  $R_1$  et de  $R_2$  permettant à ce montage de fonctionner comme oscillateur.

**IV.D :** Plus fiable que les oscillateurs électriques, une lame de quartz peut être utilisée à la place du filtre de Wien. On donne fréquemment pour le quartz le modèle électrique de la figure 11 qui résume assez bien son comportement.

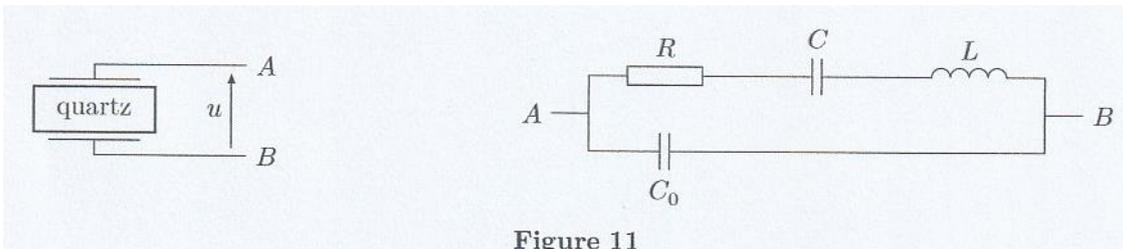


Figure 11

- Q 45.** Etudier le comportement asymptotique du modèle : il s'agit **qualitativement** de trouver une représentation simplifiée du quartz pour les cas  $\omega \rightarrow 0$  et  $\omega \rightarrow \infty$ .

La courbe de la figure 12 représente l'allure de la partie imaginaire de l'impédance équivalente du modèle électrique du quartz  $\text{Im}(\underline{Z}_{AB})$  en fonction de la fréquence lorsque **la résistance  $R$  est négligeable**.

- Q 46.** Quelles sont les pulsations remarquables ?

- Q 47.** Dans quel(s) intervalle(s) peut-on dire que le comportement du quartz est capacitif ? Justifier.

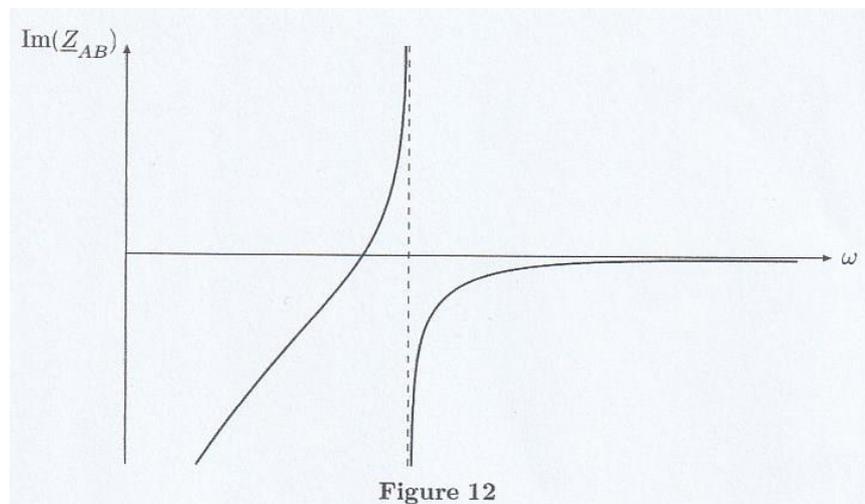


Figure 12

Document annexe à rendre avec la copie

Nom :

Prénom :

