Devoir surveillé n° 7 (Sujet A)

Thermodynamique

— *La durée de l'épreuve est de 4 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.*
— *L'usage de la calculatrice est autorisé.*
— *Les numéros de questions et les résultats doivent ressortir de votre copie (pas de rédaction monochrome).*
— *Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.*
— *Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.*
— *Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*

Problème 1 Bilan thermique d'un cycliste d'appartement

La thermorégulation d'un athlète est étudiée sur un vélo d'appartement ce qui permet d'éviter de devoir prendre en compte l'étude de l'influence de la vitesse.

En l'absence de variation d'énergie cinétique macroscopique et d'énergie potentielle, le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé relie la variation d'énergie interne de ce système aux échanges avec le milieu extérieur.

A Quelques généralités

A.1 Rappeler l'expression du premier principe pour une transformation élémentaire en précisant les noms des différentes grandeurs physiques qui interviennent.

A.2 Quel sont les différents modes de transfert thermique que le cycliste peut échanger avec l'extérieur. On développera chacun des modes.

A.3 Définir la capacité thermique à volume constant d'un système (on attend une phrase et une expression). Que devient cette expression pour un gaz parfait ? pour une phase condensée incompressible et indilatable ?

A.4 Dessiner l'allure du diagramme (P, T) d'équilibre de l'eau. On fera apparaître sur ce diagramme les différentes phases ainsi que les points triple et critique dont on donnera la définition.

A.5 Qu'est ce qui distingue la vaporisation et l'évaporation ? Quels sont les critères permettant de prédire un phénomène d'évaporation ?

B Un premier modèle

On suppose que la puissance thermique dégagée par les muscles est égale aux trois quarts de la puissance mécanique algébrique $\mathcal{P}$ fournie par le cycliste. Cette puissance thermique de valeur absolue $\dfrac{3|\mathcal{P}|}{4}$ est reçue par le cycliste.

Nous allons modéliser le corps d'un cycliste par un solide homogène de capacité thermique C, de température θ, en contact avec l'atmosphère de température constante $\theta_0 \leq \theta$ (en °C). Nous ne prendrons pas en compte dans un premier temps la transpiration mais les transferts thermiques par conduction et convection entre le cyclisme et l'atmosphère au niveau de la peau ; ces transferts sont proportionnels :

- à l'écart de température entre la surface de la peau et l'air ;
- à la surface de contact S entre le cycliste et l'air ;
- et à la durée considérée.

Cette loi de transfert thermique (dite loi de Newton) est donc de la forme $\delta Q = h(\theta_0 - \theta)S\mathrm{d}t$ où δQ représente les échanges thermiques entre le cycliste et l'atmosphère entre t et $t + \mathrm{d}t$, et h un paramètre constant positif.

La capacité thermique totale notée C du cycliste est évaluée à $C = 3{,}0 \times 10^2\,\mathrm{kJ\,K^{-1}}$.

B.1 Donner l'expression du transfert thermique élémentaire échangé avec les muscles, noté δQ_m pendant la durée $\mathrm{d}t$ en fonction de la puissance mécanique $\mathcal{P}$.

B.2 Dans l'application du premier principe de la thermodynamique au cycliste, seuls les transferts thermiques reçus par le cycliste doivent être pris en compte. Montrer alors que l'équation différentielle vérifiée par la température du solide est de la forme :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + a\theta = b$$

où $a = \dfrac{hS}{C}$ et $b = \dfrac{hS\theta_0}{C} - \dfrac{3\mathcal{P}}{4C}$.

B.3 À partir de cette équation différentielle, justifier qu'il est possible de déterminer un temps caractéristique de l'évolution de la température du cycliste. Donner son expression et sa valeur numérique si $h = 11\,\mathrm{W\,K^{-1}\,m^{-2}}$, $\mathcal{P} = -4{,}0 \times 10^2\,\mathrm{W}$, $S = 0{,}70\,\mathrm{m^2}$ (1,80 m pour 80 kg) et $\theta_0 = 20\,°\mathrm{C}$.

B.4 Déterminer la température finale du cycliste.

B.5 Conclure sur la validité du modèle.

C Prise en compte de la sudation

On envisage désormais un aspect supplémentaire de la régulation thermique avec la sudation et l'évaporation de la sueur tout en conservant la conduction et la convection.

C.1 À température et pression constantes, la vaporisation d'un liquide en gaz est-elle un changement d'état qui nécessite de recevoir de l'énergie ou qui en cède ?

C.2 Quel est le nom du changement d'état qui fait passer un corps pur de l'état gazeux à l'état liquide ?

L'enthalpie massique de vaporisation de la sueur, notée $\Delta_{\mathrm{vap}}h(\theta_c)$, vaut $2{,}45 \times 10^3\,\mathrm{kJ\,kg^{-1}}$ à la température θ_c considérée dans cette étude. On introduit le débit massique de sueur noté D_m afin d'ajouter un nouveau transfert thermique dans le bilan.

Le régime stationnaire est atteint, il n'y a pas d'accumulation de sueur sur la peau et le débit massique est constant.

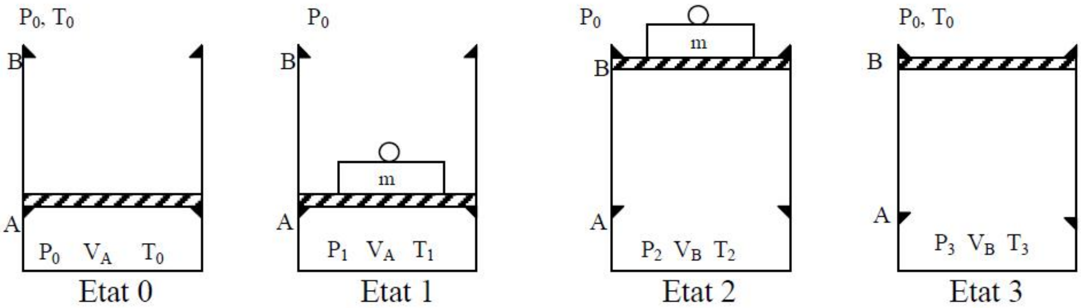
C.3 Écrire le nouveau bilan d'énergie à partir du premier principe de la thermodynamique. On suppose que la présence de la sueur ne modifie pas les autres termes énergétiques de conduction et de convection. En déduire la nouvelle équation différentielle vérifiée par θ_c.

C.4 En déduire l'expression du débit massique et calculer sa valeur numérique pour maintenir la température θ_c. On prendra $\theta_c = 37\,°$.

C.5 On assimile la sueur à de l'eau dont la masse volumique est $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$. Exprimer puis calculer le volume de sueur nécessaire pour maintenir la température du corps à θ_c pendant un effort de 4 h. Conclure.

Problème 2 Étude d'un cycle thermodynamique

Les différentes transformations seront supposées infiniment lentes. On imagine un cylindre aux parois diathermanes (perméables au transfert thermique), fermé par un piston. Le piston, de masse négligeable, peut glisser sans frottement entre 2 cales A et B, sa section est S. Dans l'état initial, le piston est en A, le cylindre renferme un volume V_A d'air supposé gaz parfait, de coefficient γ, à la température de l'extérieur : T_0, pression P_0, (gaz dans l'état 0 : P_0, V_A, T_0).



On place une masse m sur le piston et on chauffe très doucement le gaz par un moyen approprié, non représenté sur le schéma, jusqu'à ce que le piston décolle juste de la cale A (gaz dans l'état 1 : P_1, V_A, T_1). Puis, on maintient le chauffage jusqu'à ce que le piston arrive juste en B (gaz dans l'état 2 : P_2, V_B, T_2), le chauffage est alors arrêté.
On ôte m et on laisse refroidir l'ensemble jusqu'à ce que le piston décolle juste de B (gaz dans l'état 3 : P_3, V_B, T_3).
On laisse toujours refroidir jusqu'à la température T_0, alors, le piston revient en A (gaz dans l'état 0), le cycle est terminé.

Données :
$V_B = 1,00\ L, V_A = 330\ mL, T_0 = 300\ K, P_0 = 1,00\ bar, m = 10,0\ kg, S = 100\ cm^2, g = 9,81\ N.kg^{-1}, \gamma = 1,40$.
La constante des gaz parfaits est : $R = 8,31\ J.K^{-1}.mol^{-1}$. Les capacités thermiques du gaz seront supposées indépendantes de la température et $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$ avec C_{pm} et C_{vm} : capacités thermiques molaires, respectivement à pression et à volume constants du gaz.

1. Montrer que : $R = C_{pm} - C_{vm}$.
2. On admet que la capacité thermique à volume constant C_v s'écrit $C_v = \dfrac{nR}{\gamma - 1}$ où n est la quantité de matière du gaz enfermé. Exprimer C_p et C_v en fonction de P_0, V_A, T_0 et γ.
3. Quelle est la nature de la transformation de 0 à 1 subie par le gaz ?
4. Exprimer la pression P_1 et la température T_1 en fonction de P_0, T_0, m, g, S. Faire l'application numérique.
5. Exprimer le transfert thermique Q_{01} reçue par le gaz au cours de cette transformation en fonction des données puis faire l'application numérique.
6. Quelle est la nature de la transformation 1 à 2 subie par le gaz ?
7. Exprimer la température T_2 en fonction de T_1, V_A, V_B. Faire l'application numérique.
8. Exprimer le transfert thermique Q_{12} reçue par le gaz au cours de cette transformation en fonction des données puis faire l'application numérique.
9. Quelles sont les natures des transformations 2 à 3 et 3 à 0 subies par le gaz ?
10. Exprimer le travail W algébriquement reçu par le gaz de l'extérieur, au cours du cycle, en fonction de m, g, V_A, V_B, S. Faire l'application numérique.
11. Justifier que le rendement de ce « moteur » s'écrit $\eta = \frac{-W}{Q_{01}+Q_{12}}$ puis calculer numériquement sa valeur.
12. Tracer l'allure du diagramme de Clapeyron du cycle considéré. Comment peut-on justifier le sens de parcours de ce cycle ?
13. Retrouver, d'après le diagramme, le travail W calculé précédemment.

Problème 3 Notion de température et de pression

Notation et données :

- Constante de Boltzmann : $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\mathrm{J\,K^{-1}}$
- Nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
- Constante du gaz parfait : $R = N_A k_B = 8{,}31\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$

A Modèle du gaz parfait et mesure de température

Nous considérons un système fermé constitué de n moles d'un gaz dont l'état thermodynamique est caractérisé par sa pression P, sa température T et le volume V qu'il occupe. Expérimentalement, on constate que ces variables sont liées. Nous traduisons cette propriété par la relation $\Phi(P, V, T) = 0$, appelée équation d'état.

A.1 Représenter, dans le plan $(x = V; y = P)$ et pour un gaz parfait, un réseau d'évolutions isothermes (quasistatiques). Indiquer comment procéder pour faire suivre à un gaz une évolution isotherme.

A.2 Une évolution isotherme ayant été tracée à une température T_1 connue, indiquer comment on déterminerait la température T_2 d'une autre évolution isotherme.

Les particules formant un gaz sont en permanente agitation, appelée agitation thermique. Cela exclut de pouvoir considérer l'équilibre thermodynamique comme la simple manifestation d'un équilibre à l'échelle particulaire. D'incessantes collisions se produisent entre les particules et entre ces dernières et la paroi de l'enceinte qui les confine. Pour décrire cette situation, nous modélisons les particules comme des sphères rigides de rayon r subissant des collisions élastiques. Nous notons n^* leur nombre par unité de volume.

Sur la base du modèle du gaz parfait, nous allons définir quelques grandeurs caractéristiques microscopiques et leur attribuer un ordre de grandeur. On définit le libre parcours moyen ℓ par la distance moyenne que parcourt une particule entre deux collisions consécutives, avec ses voisines. Nous notons d la distance moyenne entre particules.

A.3 Préciser la distance d_c entre les centres de deux particules, au moment de leur choc. En traduisant le fait qu'une particule parcourt, en moyenne, la distance ℓ sans rencontrer aucune voisine, établir la dépendance de ℓ avec n^* et le rayon r. Pour ce calcul, visant simplement à mettre en relation ces grandeurs caractéristiques, nous imaginerons qu'une particule « test » se déplace en conservant toujours la même direction et que toutes les autres particules sont immobiles.

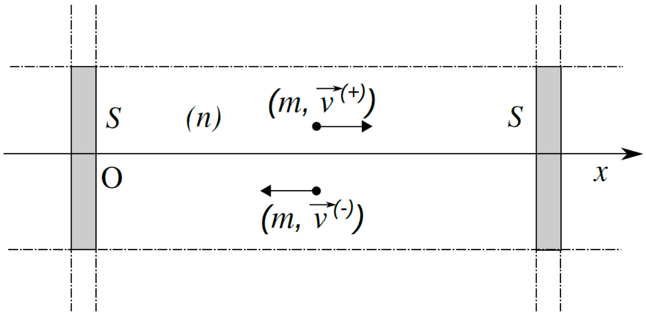
A.4 On considère un gaz (parfait) à la température $T = 298\,\mathrm{K}$ et à la pression $P = 1{,}00\,\mathrm{bar}$. Calculer le nombre de particule par unité de volume n^*.

A.5 En considérant un modèle grossier où chaque particule occupe le centre d'un cube de côté d, calculer la valeur de d puis de ℓ en proposant un ordre de grandeur réaliste de r.

A.6 Rappeler les hypothèses du modèle du gaz parfait puis indiquer dans quelle limite, portant sur n^*, le comportement d'un gaz tend vers celui d'un gaz parfait. On définit alors une grandeur sans dimension $\varphi = \dfrac{r}{\ell}$ pour caractériser le comportement d'un gaz. Dans quel cas pourtant sur φ le gaz se rapproche d'un gaz parfait ?

B Interprétation cinétique de la pression

Nous considérons une enceinte contenant un gaz formé de n^* particules par unité de volume, de masse m. Nous considérons que les particules se déplacent selon une seule direction définie par l'axe (Ox). L'enceinte est alors un espace délimité par deux parois, disposées perpendiculairement à cet axe, que les particules heurtent élastiquement (voir la figure ci-dessous). Selon leur sens de déplacement, ces dernières sont animées des vitesses $\vec{v}^+ = v_x \vec{u}_x$ ou $\vec{v}^- = -v_x \vec{u}_x$ $(v_x \geq 0)$, de façon équiprobable.



B.1 Déterminer le nombre (moyen) δN_p de particules qui subissent un choc contre l'une des portions de surface S de la paroi (voir figure ci-dessus), pendant un intervalle de temps δt.

B.2 Les chocs étant supposés élastiques, la collision d'une particule avec la paroi a simplement pour conséquence le changement du signe de sa quantité de mouvement. Exprimer alors la variation de quantité de mouvement $\Delta \vec{p}$ d'une particule, causée par son choc sur la paroi droite de l'enceinte (figure ci-dessus). Avec le résultat de la question précédente, en déduire la variation de quantité de mouvement $\delta \vec{p}$ de l'ensemble des particules heurtant la portion de surface S de la paroi droite de l'enceinte, pendant δt.

B.3 Exprimer enfin la pression P exercée par les particules sur les parois de l'enceinte.

En réalité, la vitesse des particules est largement répartie, en norme comme en direction. La pression exercée par les particules sur la paroi est la somme de toutes les contributions de vitesse. Pour considérer cet effet nous remplacerons v_x^2 par sa moyenne $\langle v_x^2 \rangle$ sur l'ensemble des vitesses. D'autre part, les trois axes de l'espace étant équivalents pour un système isolé, nous admettrons que les composantes de la vitesse vérifient $\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle$.

B.4 Justifier alors que la pression P du gaz exercée sur une paroi de l'enceinte s'écrit :
$P = \beta n^* m v_q^2$, où β est une constante numérique à déterminer et où $v_q = \sqrt{\langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle}$ est la vitesse quadratique moyenne des particules.

C Interprétation de la température

Le gaz contenu dans l'enceinte est un gaz parfait monoatomique et on donne son énergie interne en fonction du nombre de particules N_p, de la constante de Boltzmann k_B et de la température T : $U = \frac{3}{2} N_p k_B T$.

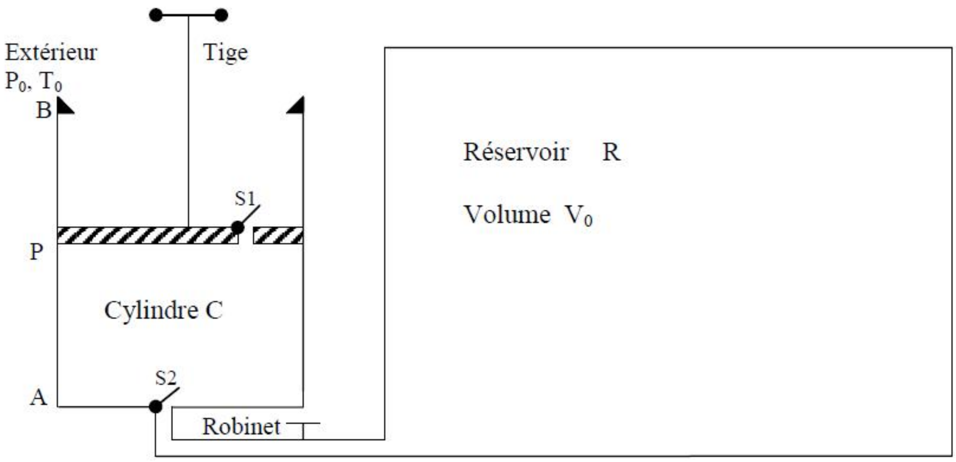
C.1 Définir l'énergie interne du gaz U puis expliquer pourquoi elle se limite à l'énergie cinétique moyenne des particules dans le cas du gaz parfait monoatomique. En déduire une expression de U en fonction de la vitesse quadratique moyenne v_q.

C.2 Déduire des calculs précédents la relation liant la température T décrivant l'état thermodynamique du gaz à v_q, grandeur d'origine microscopique.

C.3 À partir des expressions obtenues de la pression et de la température, établir la loi du gaz parfait.

Problème 4 Pompe à vide

Le schéma suivant représente, en coupe, un réservoir R, un cylindre C (leurs parois sont diathermanes, c'est-à-dire perméables au transfert thermique) et un piston P dont la course est limitée par le fond A et la cale B. Quand le piston est en A, le volume du cylindre limité par le piston est V_A, quand il est en B : V_B. Le système est de plus, muni de deux soupapes : S_1 permettant le passage du gaz uniquement de C vers l'extérieur et S_2 uniquement de R vers C, et ce, dès que la différence de pression entre les parties inférieure et supérieure de la soupape est positive. Le cylindre est relié, par un tube de volume négligeable devant les autres volumes du système, au réservoir R de volume V_0, très supérieur à V_B, contenant de l'air, supposé gaz parfait, dans lequel on souhaite « faire le vide ».



1. Dans l'état initial, le piston est en B, le cylindre et le réservoir contiennent de l'air à la pression atmosphérique P_0 et à la température T_0. On pousse le piston jusqu'en A exactement contre le fond (on considère qu'ici $V_A = 0$) et on le ramène en B assez lentement pour que la température reste T_0. Expliquer les différents transferts de gaz au cours de cet aller-retour. Montrer que la pression P_1 dans R quand le piston revient en B est : $P_1 = P_0 \frac{V_0}{V_B + V_0}$.
2. Si les transferts de gaz s'effectuent encore de la même façon, exprimer littéralement la pression P_2 après un deuxième aller-retour du piston.
3. Donner, dans ce cas, la forme générale de P_n après le nième aller-retour. Quelle est la limite de P_n quand $n \to \infty$?
4. En réalité, quand le piston est en A, le volume V_A entre le piston et le fond n'est pas nul. La limite théorique précédente ne peut pas être atteinte. Pourquoi ? Déterminer la véritable limite théorique de cette pompe à vide. Pourquoi appelle-t-on V_A le « volume nuisible » ?