Correction du devoir surveillé n° 7A

Problème 1 Bilan thermique d'un cycliste d'appartement

A Quelques généralités

A.1 Le premier principe de la thermodynamique appliqué une système fermé macroscopiquement au repos s'écrit entre deux instants voisins : $\mathrm{d}U = \delta W + \delta Q$ avec $\mathrm{d}U$ la variation d'énergie interne élémentaire du système, δQ et δW le transfert thermique et le travail des forces de pression algébriquement reçu par le système pendant le temps $\mathrm{d}t$.

A.2 Les différents modes de transfert thermique sont la convection, la conduction et le rayonnement. Il rayonne du fait de sa température dans l'infrarouge, en extérieur il pourrait également recevoir un transfert thermique par rayonnement de la part du Soleil. L'air à son contact lui font perdre un transfert thermique par convection. Le contact entre ses mains et son vélo lui font perdre un transfert thermique par conduction.

A.3 La capacité thermique à volume constant d'un système est l'énergie nécessaire pour augmenter sa température de 1 °C à volume constant : $C_v = \left(\dfrac{\partial U}{\partial T}\right)_V$. Le cas d'un gaz parfait suit la première loi de Joule, ainsi U ne dépend que de la température et $C_v = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$ alors que pour une phase condensée incompressible et indilatable $C_P \approx C_V = C\dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$.

A.4 cf cours : Pente Solide liquide positive. Point triple : Point où coexistent les trois états de la matière en équilibre.
Point Critique : limite au delà de laquelle, le changement d'état liquide-gaz n'est plus observable.

A.5 La vaporisation est la transition de phase liquide-vapeur qui s'effectue à la température de changement d'état (diagramme d'équilibre (P, T)) au sein du système alors que l'évaporation est un phénomène lent qui s'effectue à la surface libre du fluide à une température inférieure à la température de changement d'état. L'évaporation est possible lorsque la pression partielle en fluide est inférieur au sein de l'atmosphère inerte à la pression de vapeur saturante à la température T.

B Un premier modèle

B.1 $\mathcal{P}$ est une puissance algébrique fournie par les muscles. Le transfert thermique algébriquement reçu par le cycliste s'écrit alors $\delta Q_= - \frac{3}{4}\mathcal{P}\mathrm{d}t$.

B.2 L'application du premier principe $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta Q_m$ avec $\mathrm{d}U = C\mathrm{d}\theta$ et $\delta Q = h(\theta_0 - \theta)\mathrm{d}t$. On a ainsi alors :

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{C}\theta = \frac{hS\theta_0}{C} - \frac{3\mathcal{P}}{4C}$$

On retrouve ainsi la forme demandée avec $a = \dfrac{hS}{C}$ et $b = \dfrac{hS\theta_0}{C} - \dfrac{3\mathcal{P}}{4C}$.

B.3 On reconnaît une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant où on identifie la constante de temps $\tau = \dfrac{C}{hS} = 3{,}9 \times 10^4\,\mathrm{s}$.

B.4 La solution particulière de cette équation différentielle correspond au régime permanent : $\theta_f = \frac{b}{a} = \theta_0 - \frac{3\mathcal{P}}{4hS} = 59\,°\mathrm{C}$.

B.5 Une telle température corporelle est nécessairement létale. Il faut tenir compte des mécanismes de régulation de température.

C Prise en compte de la sudation

C.1 la vaporisation d'un liquide en gaz nécessite de recevoir de l'énergie.

C.2 Le nom du changement d'état qui fait passer un corps pur de l'état gazeux à l'état liquide est la liquéfaction ou condensation.

C.3 Au bilan précédent il faut ajouter un nouveau terme, correspondant au transfert thermique cédé par le cycliste à la sueur qui s'évapore. Ce terme s'exprime $\delta Q_s = -D_m \mathrm{d}t \Delta h(\theta_c)$.

L'application du premier principe devient désormais $\mathrm{d}U = \delta Q + \delta Q_m + \delta Q_s$ soit

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{C}\theta = \frac{hS\theta_0}{C} - \frac{3\mathcal{P}}{4C} - \frac{D_m \Delta_{vap} h(\theta_c)}{C}$$

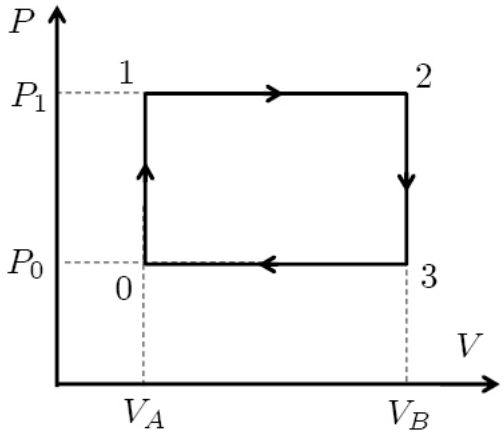
C.4 La solution particulière de l'équation différentielle obtenue ci-dessus s'écrit :

$$\theta_f = \theta_0 - \frac{3\mathcal{P}}{4hS} - \frac{D_m \Delta_{vap} h(\theta_c)}{hS}, \text{ soit } D_m = \frac{1}{\Delta_{vaph(\theta_c)}}\left(h(\theta_0 - \theta_c)S - \frac{3\mathcal{P}}{4}\right) = 6{,}9 \times 10^{-9}\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$$

C.5 Considérant que l'effort du cycliste dure $t_u = 4\,\mathrm{h}$, la masse d'eau vaporisée vaut $D_m t_u$, le volume correspondant de sueur vaut donc $D_m t_u/\rho = 0{,}99\,\mathrm{L}$. Le cycliste devra s'hydrater beaucoup pendant l'effort.

Problème 2 Étude d'un cycle thermodynamique

1. On considère un gaz parfait d'équation d'état $PV = nRT$ qui suit les deux lois de Joule. Ainsi : $C_v = \dfrac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}T}$ et $C_P = \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}T}$. En partant de la définition de l'enthalpie et en la dérivant par rapport à la température. On obtient $C_p - C_v = nR$ soit $C_{pm} - C_{vm} = R$
2. $\boxed{C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} = \frac{P_0 V_A \gamma}{T_0(\gamma-1)}}$; $\boxed{C_v = \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{P_0 V_A}{T_0(\gamma-1)}}$.
3. Le gaz parfait subit une transformation isochore infiniment lente entre 0 et 1.
4. Pour calculer P_1, on applique le principe fondamental de la statique au piston de masse négligeable. Bilan des forces (le vecteur $\vec{u}_z$ est orienté vers le haut) : poids de la masse $-mg\vec{u}_z$; $\vec{F}_{\text{atm}\to\text{piston}} = -P_0 S\vec{u}_z$; $\vec{F}_{\text{gaz}\to\text{piston}} = P_1 S\vec{u}_z$; on obtient $\boxed{P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}}$. AN : $\underline{P_1 = 1{,}10\,\text{bar}}$. La loi des gaz parfaits permet d'obtenir, n et V_A étant constants, $\frac{P}{T} = \text{cste}$, donc $T_1 = \frac{P_1}{P_0}T_0$. On obtient donc : $\boxed{T_1 = T_0\left(1 + \frac{mg}{P_0 S}\right)}$. AN : $\underline{T_1 = 329\text{ K}}$.
5. Appliquons le premier principe au système {gaz}. La transformation étant isochore, le travail reçu par le gaz est nul. On obtient $Q_{01} = \Delta U = C_v \Delta T$. On a donc $\boxed{Q_0^1 = C_v(T_1 - T_0) = \frac{P_0 V_A}{\gamma-1}\frac{T_1 - T_0}{T_0}}$. AN : $\underline{Q_{01} = 8,09\text{ J}}$.
6. À chaque étape de la transformation $1 \to 2$, la pression sur la surface extérieure est constante et la transformation est infiniment lente. Le gaz parfait subit donc une transformation isobare entre 1 et 2.
7. n et P étant constants, la loi des gaz parfaits permet d'écrire : $\frac{T}{V} = \text{cste}$. Donc $\boxed{T_2 = \frac{V_B}{V_A}T_1}$. AN : $\underline{T_2 = 998\text{ K}}$.
8. La transformation étant isobare , $Q_{12} = \Delta H$ soit $\boxed{Q_{12} = C_p(T_2 - T_1) = \frac{P_0 V_A \gamma}{\gamma-1}\frac{T_2 - T_1}{T_0}}$. AN : $\underline{Q_{12} = 258\text{ J}}$.
9. La transformation $2 \to 3$ est isochore et infiniment lente. La transformation $3 \to 0$ est isobare.
10. U étant une fonction d'état, le premier principe appliqué sur un cycle s'écrit : $\Delta U = 0 = W + Q_{01} + Q_{12} + Q_{23} + Q_{30}$. Donc $W = -Q_{01} - Q_{12} - Q_{23} - Q_{30}$.
    La transformation $2 \to 3$ étant isochore, on a $Q_{23} = \frac{P_0 V_A}{\gamma-1}\frac{T_3 - T_2}{T_0}$ avec $T_3 = \frac{P_3}{P_2}T_2 = \frac{P_0}{P_1}T_2 = 909\,\mathrm{K}$ (loi des gaz parfaits, avec $P_3 = P_0$ et $P_2 = P_1$).
    La transformation $3 \to 0$ étant isobare, $Q_{30} = \frac{P_0 V_A \gamma}{\gamma-1}\frac{T_0 - T_3}{T_0}$.
    On obtient donc $W = \frac{P_0 V_A}{T_0}(T_1 + T_3 - T_0 - T_2) = P_0 V_A\left(\frac{P_1}{P_0} + \frac{V_B}{V_A} - 1 - \frac{V_B}{V_A}\frac{P_1}{P_0}\right)$. Donc $\boxed{W = \frac{mg}{S}(V_A - V_B)}$.
    AN : $\underline{W = -6,57\text{ J}}$.
11. $r = \dfrac{\text{énergie utile}}{\text{énergie coûteuse}}$. L'énergie coûteuse est celle apportée par chauffage, c'est-à-dire la chaleur apportée au cours des transformations $0 \to 1$ et $1 \to 2$. Donc $\eta = \frac{-W}{Q_{01}+Q_{12}}$. AN : $\underline{\eta = 2,47\ \%}$.
12. $W = -\int P\mathrm{d}V = -\mathcal{A}$ (sens horaire lorsque $W < 0$ et $\mathcal{A} > 0$.



13. W est l'opposé de l'aire intérieure au cycle décrit dans le diagramme de Clapeyron : $W = (P_1 - P_0)(V_B - V_A) = \frac{mg}{S}(V_B - V_A)$. On retrouve bien le résultat de la question 10.

Problème 3 Notion de température et de pression

A Modèle du gaz parfait et mesure de température

A.1 Pour un gaz parfait $PV = nRT$, lors d'une transformation isotherme le second membre est constant soit $PV = \text{cste}$. Les isothermes sont donc des hyperboles. Lorsqu'on fixe le volume, une augmentation de pression entraîne une augmentation de température.

Pour faire suivre à un système une évolution isotherme, il suffit de le mettre au contact d'un thermostat de température T via des parois diathermanes.

A.2 Si une évolution est tracée dans le diagramme (P, V), il suffit de prendre un point de cette courbe (P_1, V_1) pour connaître la quantité de matière du système : $n = \dfrac{P_1V_1}{RT_1}$. Ensuite à partir d'un point (P_2, V_2) de la seconde évolution on peut déterminer $T_2 = T_1\dfrac{P_2V_2}{P_1V_1}$.

A.3 Au moment du choc $d_c = 2r$. En considérant une particule mobile et les autres immobile, si la particule mobile passe à une distance inférieure à d_c il y a collision. Sur le trajet de la particule toute particule se trouvant interceptée par une section $S = \pi d_c^2$ centrée au centre de la particule mobile crée une collision. Le libre parcours moyen étant la distance moyenne entre deux impacts, la probabilité de trouver une particule dans le volume $S\ell$ est égale à 1. On a alors $n^* = \dfrac{1}{\ell S} = \dfrac{1}{4\pi r^2}$.

A.4 On utilise la relation des gaz parfaits : $PV = Nk_BT$ soit $n^* = \dfrac{N}{V} = \dfrac{P}{k_BT} = 2{,}43 \times 10^{25}\,\text{m}^{-3}$.

A.5 En considérant un modèle où chaque particule occupe le centre d'un cube de côté d, on a $d^3 = \dfrac{1}{n^*}$ soit $d = 3{,}4 \times 10^{-9}\,\text{m}$. On peut choisir pour valeur de r la taille d'une molécule soit quelques angström. Prenons par exemple $r = 3{,}0 \times 10^{-10}\,\text{m}$, on en déduit $\ell = \dfrac{1}{n^*4\pi r^2} = 3{,}6 \times 10^{-8}\,\text{m}$ (pour $r = 1 \times 10^{-10}\,\text{m}$, $\ell = 3 \times 10^{-7}\,\text{m}$.

A.6 Dans le modèle d'un gaz parfait, on néglige les interactions entre les molécules et on considère les molécules ponctuelles. Plus n^* est faible moins il y a de particules dans un volume donné, et plus le gaz tend vers le comportement d'un gaz parfait. Pour de faibles valeurs de φ, les chocs sont plus rares et le gaz peut être assimilé à un gaz parfait.

B Interprétation cinétique de la pression

B.1 Les particules susceptibles de heurter la paroi entre t et $t + \delta t$ se situent dans un cylindre de section S et de hauteur $v_x\delta t$ (distance parcourue pendant δt) mais cela concerne seulement la moitié des particules soit : $\delta N_p = \dfrac{1}{2}n^*Sv_x\delta t$

B.2 $\Delta\vec{p}_{1\text{part.}} = \delta\vec{p}_{\text{ap}} - \delta\vec{p}_{\text{av}} = -2mv_x\vec{u}_x$. On en déduit pour les $\delta N_p articules$: $\delta\vec{p} = -n^*mS\delta t v_x^2\vec{u}_x$.

B.3 On applique la deuxième loi de Newton aux δN_p particules dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen : $\dfrac{\delta\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{paroi/particules}} = -PS\vec{u}_x$. Par identification, on obtient $P = n^*mv_x^2$.

B.4 En 3 dimensions, les particules sont susceptibles de se déplacer selon 3 directions et 6 sens (au lieu de 2 dans l'étude précédente). Il faut alors ajouter à l'expression précédente un facteur $\frac{1}{3}$ (on suppose que toutes les particules ont la même vitesse en norme). Soit $P_{3\mathrm{D}} = \frac{1}{3}n^* m v_q^2$ soit $\beta = 1/3$.

C Interprétation de la température

C.1 L'énergie interne du gaz U est la somme des énergie microscopiques (énergies de translation, vibration, rotation et énergies potentielles d'interaction particulaire). Dans le cas d'un GPM on néglige les interactions entre les particules et le fait que les particules soient considérées ponctuelles permet de négliger les énergies de rotation ou de vibration. Il ne reste ainsi que l'énergie cinétique moyenne des particules. $U = N_p\langle E_c\rangle = N_p\frac{1}{2}mv_q^2$.

C.2 L'agitation thermique des molécules est liée à l'énergie cinétique moyenne par la relation $\langle E_c\rangle = \frac{3}{2}k_BT$ soit $v_q = \sqrt{\frac{3k_BT}{m}}$

C.3 À partir des expressions précédentes , on $PV = \frac{1}{3}n^* m v_q^2 V = N_p k_B T$ soit $PV = nRT$ avec $n = \frac{N_p}{N_A}$ le nombre de moles de gaz).

Problème 4 Pompe à vide

1. Lorsqu'on pousse le piston de la position B vers la position A, la totalité du gaz contenu dans le cylindre C s'échappe vers l'extérieur par la soupape S_1 ; il ne reste plus que $\frac{P_0V_0}{RT_0}$ moles de gaz dans l'ensemble {cylindre + réservoir}. Lorsqu'on ramène le piston de la position A vers la position B, une partie du gaz contenu dans le réservoir R passe dans le cylindre C par la soupape S_2 : le gaz contenu dans l'ensemble {cylindre + réservoir} constitue un système fermé et subit une détente isotherme, passant du volume V_0 et de la pression P_0 au volume $V_B + V_0$ et à la pression P_1. La loi des gaz parfaits nous permet d'écrire $PV = \text{cste}$. On obtient donc : $\boxed{P_1 = \frac{V_0}{V_0+V_B}P_0}$.

2. De la même façon, après le deuxième aller-retour du piston, $P_2 = \frac{V_0}{V_0+V_B}P_1$, soit $\boxed{P_2 = \left(\frac{V_0}{V_0+V_B}\right)^2 P_0}$.

3. Par récurrence, on a donc $\boxed{P_n = \left(\frac{V_0}{V_0+V_B}\right)^n P_0}$. Puisque $V_0 < V_0 + V_B$, on obtient : $\boxed{\lim_{n\to\infty} P_n = 0}$.

4. Le volume V_A n'étant pas nul, la totalité du gaz contenu dans le cylindre C ne s'échappe pas vers l'extérieur : la pression du gaz dans le cylindre est limitée à P_0. Lorsque le piston est en A il reste donc toujours $\frac{P_0V_A}{RT_0}$ moles de gaz dans le cylindre C. Lorsqu'on ramène la piston de la position A vers la position B, on ne peut donc pas espérer atteindre une pression inférieure à $\boxed{P_f = \frac{V_A}{V_B+V_0}P_0}$, qui est notre nouvelle limite théorique. Cette nouvelle limite est proportionnelle au volume V_A : elle ne peut être nulle que si V_A est nul, d'où le nom de « volume nuisible ».