

## Correction du devoir surveillé n° 7B

### Problème 1 Bilan thermique d'un cycliste d'appartement

#### A Quelques généralités

**A.1** Le premier principe de la thermodynamique appliqué à un système fermé macroscopiquement au repos s'écrit entre deux instants voisins :  $dU = \delta W + \delta Q$  avec  $dU$  la variation d'énergie interne élémentaire du système,  $\delta Q$  et  $\delta W$  le transfert thermique et le travail des forces de pression algébriquement reçu par le système pendant le temps  $dt$ .

**A.2** Les différents modes de transfert thermique sont la convection, la conduction et le rayonnement. Il rayonne du fait de sa température dans l'infrarouge, en extérieur il pourrait également recevoir un transfert thermique par rayonnement de la part du Soleil. L'air à son contact lui font perdre un transfert thermique par convection. Le contact entre ses mains et son vélo lui font perdre un transfert thermique par conduction.

**A.3** La capacité thermique à volume constant d'un système est l'énergie nécessaire pour augmenter sa température de  $1^\circ\text{C}$  à volume constant :  $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$ . Le cas d'un gaz parfait suit la première loi de Joule, ainsi  $U$  ne dépend que de la température et  $C_v = \frac{dU}{dT}$  alors que pour une phase condensée incompressible et indilatable  $C_P \approx C_V = C \frac{dU}{dT}$ .

**A.4** cf cours : Pente Solide liquide positive. Point triple : Point où coexistent les trois états de la matière en équilibre.

Point Critique : limite au delà de laquelle, le changement d'état liquide-gaz n'est plus observable.

**A.5** La vaporisation est la transition de phase liquide-vapeur qui s'effectue à la température de changement d'état (diagramme d'équilibre  $(P, T)$ ) au sein du système alors que l'évaporation est un phénomène lent qui s'effectue à la surface libre du fluide à une température inférieure à la température de changement d'état. L'évaporation est possible lorsque la pression partielle en fluide est inférieure au sein de l'atmosphère inerte à la pression de vapeur saturante à la température  $T$ .

#### B Un premier modèle

**B.1**  $\mathcal{P}$  est une puissance algébrique fournie par les muscles. Le transfert thermique algébriquement reçu par le cycliste s'écrit alors  $\delta Q = -\frac{3}{4}\mathcal{P}dt$ .

**B.2** L'application du premier principe  $dU = \delta Q + \delta Q_m$  avec  $dU = C d\theta$  et  $\delta Q = h(\theta_0 - \theta)dt$ . On a ainsi alors :

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{hS}{C}\theta = \frac{hS\theta_0}{C} - \frac{3\mathcal{P}}{4C}$$

On retrouve ainsi la forme demandée avec  $a = \frac{hS}{C}$  et  $b = \frac{hS\theta_0}{C} - \frac{3\mathcal{P}}{4C}$ .

**B.3** On reconnaît une équation différentielle du premier ordre linéaire à coefficient constant où on identifie la constante de temps  $\tau = \frac{C}{hS} = 3,9 \times 10^4 \text{ s}$ .

**B.4** La solution particulière de cette équation différentielle correspond au régime permanent :  $\theta_f = \frac{b}{a} = \theta_0 - \frac{3\mathcal{P}}{4hS} = 59^\circ\text{C}$ .

**B.5** Une telle température corporelle est nécessairement létale. Il faut tenir compte des mécanismes de régulation de température.

#### C Prise en compte de la sudation

**C.1** la vaporisation d'un liquide en gaz nécessite de recevoir de l'énergie.

**C.2** Le nom du changement d'état qui fait passer un corps pur de l'état gazeux à l'état liquide est la liquéfaction ou condensation.

**C.3** Au bilan précédent il faut ajouter un nouveau terme, correspondant au transfert thermique cédé par le cycliste à la sueur qui s'évapore. Ce terme s'exprime  $\delta Q_s = -D_m dt \Delta h(\theta_c)$ .

L'application du premier principe devient désormais  $dU = \delta Q + \delta Q_m + \delta Q_s$  soit

$$\frac{d\theta}{dt} + \frac{hS}{C}\theta = \frac{hS\theta_0}{C} - \frac{3P}{4C} - \frac{D_m \Delta_{vap} h(\theta_c)}{C}$$

**C.4** La solution particulière de l'équation différentielle obtenue ci-dessus s'écrit :

$$\theta_f = \theta_0 - \frac{3P}{4hS} - \frac{D_m \Delta_{vap} h(\theta_c)}{hS}, \text{ soit } D_m = \frac{1}{\Delta_{vap} h(\theta_c)} \left( h(\theta_0 - \theta_c)S - \frac{3P}{4} \right) = 6,9 \times 10^{-9} \text{ kg s}^{-1}$$

**C.5** Considérant que l'effort du cycliste dure  $t_u = 4$  h, la masse d'eau vaporisée vaut  $D_m t_u$ , le volume correspondant de sueur vaut donc  $D_m t_u / \rho = 0,99$  L. Le cycliste devra s'hydrater beaucoup pendant l'effort.

## Problème 2 Étude d'un cycle thermodynamique

1. On considère un gaz parfait d'équation d'état  $PV = nRT$  qui suit les deux lois de Joule. Ainsi :

$C_v = \frac{dU}{dT}$  et  $C_p = \frac{dH}{dT}$ . En partant de la définition de l'enthalpie et en la dérivant par rapport à la température. On obtient  $C_p - C_v = nR$  soit  $C_{pm} - C_{vm} = R$

2.  $C_p = \frac{nR\gamma}{\gamma-1} = \frac{P_0 V_A \gamma}{T_0(\gamma-1)}$  ;  $C_v = \frac{nR}{\gamma-1} = \frac{P_0 V_A}{T_0(\gamma-1)}$ .

3. Le gaz parfait subit une transformation isochore infiniment lente entre 0 et 1.

4. Pour calculer  $P_1$ , on applique le principe fondamental de la statique au piston de masse négligeable. Bilan des forces (le vecteur  $\vec{u}_z$  est orienté vers le haut) : poids de la masse  $-mg\vec{u}_z$  ;  $\vec{F}_{\text{atm} \rightarrow \text{piston}} = -P_0 S \vec{u}_z$  ;  $\vec{F}_{\text{gaz} \rightarrow \text{piston}} = P_1 S \vec{u}_z$  ; on obtient  $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$ . AN :  $P_1 = 1,10$  bar. La loi des gaz parfaits permet d'obtenir,  $n$  et  $V_A$  étant constants,  $\frac{P}{T} = \text{cste}$ , donc  $T_1 = \frac{P_1}{P_0} T_0$ . On obtient donc :

$$T_1 = T_0 \left( 1 + \frac{mg}{P_0 S} \right). \text{ AN : } T_1 = 329 \text{ K.}$$

5. Appliquons le premier principe au système {gaz}. La transformation étant isochore, le travail reçu par le gaz est nul. On obtient  $Q_{01} = \Delta U = C_v \Delta T$ . On a donc  $Q_{01}^1 = C_v (T_1 - T_0) = \frac{P_0 V_A}{\gamma-1} \frac{T_1 - T_0}{T_0}$ . AN :  $Q_{01} = 8,09$  J.

6. À chaque étape de la transformation  $1 \rightarrow 2$ , la pression sur la surface extérieure est constante et la transformation est infiniment lente. Le gaz parfait subit donc une transformation isobare entre 1 et 2.

7.  $n$  et  $P$  étant constants, la loi des gaz parfaits permet d'écrire :  $\frac{T}{V} = \text{cste}$ . Donc  $T_2 = \frac{V_B}{V_A} T_1$ . AN :  $T_2 = 998$  K.

8. La transformation étant isobare,  $Q_{12} = \Delta H$  soit  $Q_{12} = C_p (T_2 - T_1) = \frac{P_0 V_A \gamma}{\gamma-1} \frac{T_2 - T_1}{T_0}$ . AN :  $Q_{12} = 258$  J.

9. La transformation  $2 \rightarrow 3$  est isochore et infiniment lente. La transformation  $3 \rightarrow 0$  est isobare.

10.  $U$  étant une fonction d'état, le premier principe appliqué sur un cycle s'écrit :  $\Delta U = 0 = W + Q_{01} + Q_{12} + Q_{23} + Q_{30}$ . Donc  $W = -Q_{01} - Q_{12} - Q_{23} - Q_{30}$ .

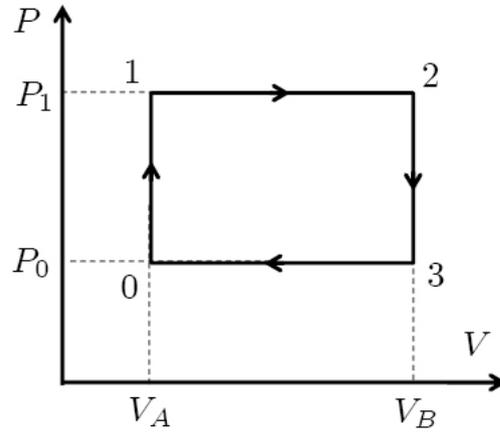
La transformation  $2 \rightarrow 3$  étant isochore, on a  $Q_{23} = \frac{P_0 V_A}{\gamma-1} \frac{T_3 - T_2}{T_0}$  avec  $T_3 = \frac{P_3}{P_2} T_2 = \frac{P_0}{P_1} T_2 = 909$  K (loi des gaz parfaits, avec  $P_3 = P_0$  et  $P_2 = P_1$ ).

La transformation  $3 \rightarrow 0$  étant isobare,  $Q_{30} = \frac{P_0 V_A \gamma}{\gamma-1} \frac{T_0 - T_3}{T_0}$ .

On obtient donc  $W = \frac{P_0 V_A}{T_0} (T_1 + T_3 - T_0 - T_2) = P_0 V_A \left( \frac{P_1}{P_0} + \frac{V_B}{V_A} - 1 - \frac{V_B}{V_A} \frac{P_1}{P_0} \right)$ . Donc  $W = \frac{mg}{S} (V_A - V_B)$ . AN :  $W = -6,57$  J.

11.  $r = \frac{\text{énergie utile}}{\text{énergie coûteuse}}$ . L'énergie coûteuse est celle apportée par chauffage, c'est-à-dire la chaleur apportée au cours des transformations  $0 \rightarrow 1$  et  $1 \rightarrow 2$ . Donc  $\eta = \frac{-W}{Q_{01} + Q_{12}}$ . AN :  $\eta = 2,47$  %.

12.  $W = - \int P dV = -\mathcal{A}$  (sens horaire lorsque  $W < 0$  et  $\mathcal{A} > 0$ ).

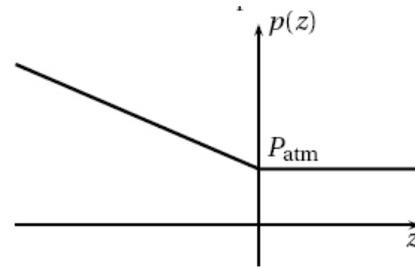


13.  $W$  est l'opposé de l'aire intérieure au cycle décrit dans le diagramme de Clapeyron :  $W = (P_1 - P_0)(V_B - V_A) = \frac{mg}{S}(V_B - V_A)$ . On retrouve bien le résultat de la question 10.

### Problème 3 La plongée sous marine

#### A Plongée libre (sans bouteille)

A.1 On a le graphe ci-contre.



A.2 L'évolution se faisant à température constante et le gaz étant parfait, on a donc :  $P(z)V(z) = P_a V_M$  d'où  $V(z) = \frac{P_a V_M}{P_a - \rho g z}$  A.N.  $V(-10) = 3,5 \times 10^{-3} \text{ m}^3$ .

Comme le plongeur retient sa respiration au cours de la plongée son poids reste constant. Par contre la poussée d'Archimède qui est proportionnelle au volume du plongeur diminue légèrement puisque le volume des poumons diminue. Le poids apparent est donc  $\vec{P}_a = \vec{P}_{\text{arch}} + m\vec{g} = g(\rho V^*(z) - m)\vec{u}_z = P_a \vec{u}_z$ . Donc  $\|\vec{P}_a\|$  augmente avec la profondeur donc la flottabilité diminue avec la profondeur.

A.3 La flottabilité est nulle quand  $P_a = 0$  c'est-à-dire quand  $\rho(V_0 + V(z)) = m + m_1$  d'où :

$$m_1 = \rho \left( V_0 + \frac{P_a V_M}{P_a - \rho g z} \right) - m \quad \text{A.N.} \quad m_1 = 1,7 \text{ kg}$$

#### B Plongée avec bouteille et détendeur

##### B.1 Remplissage de la bouteille

B.1.1 À la fin de l'admission, la pression est  $P_a$  et le volume est  $V_{\text{max}}$ . Dès que le piston change de sens,  $S$  est fermé et  $S'$  s'ouvre. La transformation étant isotherme et le gaz parfait, on a donc :

$$P_a(V_{\text{max}} + V_b) = P_b(V_{\text{min}} + V_b) \quad \text{d'où} \quad P_b = \frac{P_a(V_{\text{max}} + V_b)}{V_{\text{min}} + V_b}$$

Avant la compression le nombre de mole de gaz était :  $n_i = \frac{P_a V_b}{RT_a}$ . À la fin de la compression il est :  $n_f = \frac{P_b V_b}{RT_a}$ . D'où :  $\Delta n = \frac{V_b}{RT_a} \left( \frac{P_a(V_{\text{max}} + V_b)}{V_{\text{min}} + V_b} - P_a \right) = \frac{V_b}{RT_a} \frac{P_a(V_{\text{max}} - V_{\text{min}})}{V_{\text{min}} + V_b}$ . Avec l'hypothèse  $V_{\text{min}} \ll V_b$ , on obtient :

$$\Delta n = \frac{P_a(V_{\text{max}} - V_{\text{min}})}{RT_a} \quad \text{A.N.} \quad \Delta n = 8,2 \times 10^{-2} \text{ mol}$$

B.1.2 La soupape  $S'$  s'ouvre quand la pression dans le compresseur est égale à la pression dans la bouteille. Comme la compression est isotherme et le gaz parfait, on obtient :  $V' = \frac{P_a V_{\text{max}}}{P}$ .

Après l'admission la compression reste isotherme, donc  $P'(V_{\text{min}} + V_b) = P(V' + V_b)$  d'où

$$P' = \frac{P_a V_{\text{max}} + V_b P}{V_b + V_{\text{min}}}$$

On a donc  $\Delta P = \frac{P_a V_{\text{max}} + V_b P}{V_b + V_{\text{min}}} - P$  et donc  $\Delta P = \frac{P_a V_{\text{max}} - P V_{\text{min}}}{V_b + V_{\text{min}}}$ .

Le remplissage de la bouteille s'arrête quand  $\Delta P = 0$  c'est-à-dire quand  $P_a V_{\max} = P V_{\min}$  d'où  $P_{\max} = \frac{P_a V_{\max}}{V_{\min}}$ , ce qui correspond au cas où le piston arrive en  $AA'$  sans que la soupape  $S'$  ne s'ouvre ( $V' = V_{\min}$ ).

**B.1.3** A.N.  $\Delta P = 0,32 \times 10^5 \text{ Pa}$  et  $P_{\max} = 1,0 \times 10^7 \text{ Pa}$ .

**B.1.4** On a donc  $\frac{\Delta P}{\Delta t} = \alpha \frac{P_a V_{\max} - P V_{\min}}{V_b + V_{\min}}$ . On peut alors écrire :  $\frac{dP}{dt} + \frac{\alpha V_{\min}}{V_b + V_{\min}} P = \alpha \frac{P_a V_{\max}}{V_b + V_{\min}}$

**B.1.5** Compte tenu de  $V_{\min} \ll V_b$ , l'équation différentielle s'écrit :  $\frac{dP}{dt} + \frac{P}{\tau} = \alpha \frac{P_a V_{\max}}{V_b}$ . Après intégration de l'équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre à coefficients constants, on obtient, avec la condition initiale  $P(0) = P_a$  :

$$P(t) = (P_a - P_{\max}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + P_{\max}$$

On a donc  $T = -\tau \ln \frac{P - P_{\max}}{P_a - P_{\max}}$  et donc  $T = 42 \text{ s}$ .

## B.2 Utilité du détendeur

**B.2.1** Le gaz étant parfait, on a donc  $n_i = \frac{P V_b}{R T_a}$  et  $n_s = \frac{P_s V_b}{R T_e}$ . A.N.  $n_i = 21 \text{ mol}$  et  $n_s = 0,84 \text{ mol}$

**B.2.2** À chaque respiration le plongeur consomme  $n(z) = \frac{P(z) \Omega_0}{R T_e}$  mole d'air. Il consomme le gaz en

$$\frac{n_i - n_s}{n(z)} \text{ respirations et donc le temps au bout duquel le détendeur se bloque est } \Delta t_s(z) = \frac{1}{f} \frac{(n_i - n_s)}{\Omega_0} \frac{R T_e}{P_a - \rho g z}$$

A.N.  $\Delta t_s(z) = 4,0 \times 10^2 \text{ s}$

Remarque : ce temps peut surprendre (6 minutes 36 secondes), mais il est dû au choix des valeurs numériques. Dans la réalité la bouteille a une contenance de 12L et est gonflée sous une pression de 200 bar.

**B.2.3** On a donc  $\frac{\Delta t_s(z)}{\Delta t_s(0)} = \frac{T_e}{T_a} \frac{P_a}{P_a - \rho g z}$  A.N.  $\frac{\Delta t_s(-20)}{\Delta t_s(0)} = 0,33$ . La durée d'utilisation d'une bouteille diminue donc rapidement avec la profondeur.

## Problème 4 Navigation d'une planche à voile par vent arrière

### A Une première approche : collisions des molécules d'air sur la voile

**A.1** On suppose la planche à voile fixe ou que la vitesse du vent soit grande devant la vitesse de la planche. Les particules d'air qui vont heurter la voile pendant le temps  $\tau$  sont comprises dans un cylindre de section  $S$  et de hauteur  $v_v \tau$  (distance parcourue pendant le temps  $\tau$ ). La densité volumique des particules d'air est donnée par  $n = \frac{\rho_a}{m}$  soit  $N = \frac{\rho_a S v_v \tau}{m}$ .

**A.2** Puisque les molécules cèdent intégralement leur quantité de mouvement à la voile, la variation de quantité de mouvement d'une molécule lors d'un choc sur la voile vaut :  $\Delta \vec{p}_{1mol} = -m v_v \vec{e}_x$ .

On en déduit, par conservation de la quantité de mouvement :  $\Delta \vec{p}_{voile} = -\Delta \vec{p}_{1mol} = m v_v \vec{e}_x$ .

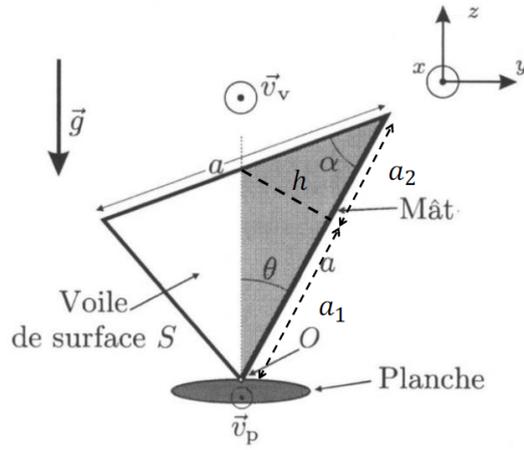
Puisque le choc dure un temps  $\tau$ , la force subie par la voile du fait d'une collision est donc donnée

par :  $\vec{f} = \frac{d\vec{p}_{voile}}{dt} = \frac{\Delta \vec{p}_{voile}}{\tau} = \frac{m v_v}{\tau} \vec{e}_x$

**A.3** Puisque  $N$  molécules transfèrent leur quantité de mouvement à la voile pendant le temps de collision  $\tau$ , on en déduit que la force propulsive vaut :  $\vec{F} = N \vec{f} = \rho_a S v_v^2 \vec{e}_x$

**A.4** La surface d'un triangle est donnée par le produit de sa base  $b$  par sa hauteur  $h$  divisé par 2, soit :

$$S = \frac{bh}{2} = \frac{2a \sin(\alpha/2) \times a \cos(\alpha/2)}{2} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2}$$



La hauteur du triangle définissant la surface  $S'$  est donnée par (cf figure ci-dessus) :

$$h = a_1 \tan \theta = a_2 \tan \alpha. \text{ Or, } a = a_1 + a_2, \text{ soit } h = \frac{a}{1/\tan \theta + 1/\tan \alpha}, \text{ soit :}$$

$$S' = \frac{a^2}{2/\tan \theta + 2/\tan \alpha}$$

L'angle  $\theta_d$  est défini par  $S' = S/2$ , on en déduit :  $\frac{1}{1/\tan \theta_d + 1/\tan \alpha} = \frac{\sin \alpha}{2}$  soit  $\frac{1}{\tan \theta_d} = \frac{2 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

On retrouve ainsi la relation demandée  $\boxed{\tan \theta_d = \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}}$ .

Numériquement on obtient  $\boxed{\theta_d = 30^\circ}$ .

## B Prise en compte d'éléments de mécanique des fluides

**B.1** La vitesse du vent apparent est donnée par  $\boxed{\vec{v}_{va} = \vec{v}_v - \vec{v}_p = (v_v - v_p) \vec{e}_x}$  (composition des vitesses)

**B.2** La deuxième loi de Newton appliqué à la voile projeté suivant  $\vec{e}_x$  dans le référentiel terrestre supposé galiléen dans le cas d'un mouvement uniforme conduit à  $\vec{F}_{pro} + \vec{F}_{res} = \vec{0}$  soit :

$$\frac{1}{2} \rho_e C_p S_p v_p^2 = \frac{1}{2} \rho_a C_v S (v_v - v_p)^2$$

Par conséquent :  $(v_p - v_v)^2 - \sigma^2 v_p^2 = ((1 - \sigma)v_p - v_v) ((1 + \sigma)v_p - v_v) = 0$ .

On obtient alors deux racines  $v_p = \pm \frac{v_v}{1 \pm \sigma}$

Même si l'on ne dispose d'aucune donnée numérique sur les surfaces et les coefficients  $C_v$  et  $C_p$ , le rapport  $\rho_e/\rho_a$  des masses volumiques, de l'ordre de 1000 impose certainement  $\sigma < 1$ . Or, la vitesse de la planche est nécessairement dans le même sens que la vitesse du vent. Par conséquent, seule la solution suivante est acceptable :  $\boxed{v_p = \frac{v_v}{1 + \sigma} < v_v}$  On en déduit que la planche ne peut aller plus vite que le vent.