

Problème I Régate spatiale

1. Appliquons la deuxième loi de Newton à IKAROS :

$$M\vec{a} = -\mathcal{G}\frac{MM_{\text{soleil}}}{R^2}\vec{u}_r \text{ avec } \vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u}_r \text{ puisque la trajectoire est circulaire. Nous en déduisons}$$

$$\text{le rayon } R \text{ de la trajectoire : } R = \left(\mathcal{G}\frac{M_{\text{soleil}}T^2}{4\pi^2}\right)^{(1/3)} = 1,3 \times 10^8 \text{ km. Enfin, le flux solaire reçu par}$$

$$\text{IKAROS s'écrit : } \phi_r = C \left(\frac{U}{R}\right)^2 = 1,8 \text{ kW m}^{-2}.$$

2. $dN = ncSdt$ avec n le nombre de photons par unité de volume et de temps.

3. Chaque photon possède une énergie $h\nu_m = \frac{hc}{\lambda_m}$. n est la densité de photons incidents au voisinage de la voile. Ainsi, le nombre de photons atteignant une unité de surface d'IKAROS par unité de temps est nc . L'énergie reçue par unité de surface et de temps est donc $\phi_r = nc\frac{hc}{\lambda_m}$. Ainsi : $n = \frac{\phi_r \lambda_m}{hc^2}$.

4. Le nombre de photons dN heurtant la surface S pendant dt s'écrit $dN = ncSdt$. Chaque photon incident transporte la quantité de mouvement $\vec{p}_i$ alors qu'un photon réfléchi transporte la quantité de mouvement $-\vec{p}_i$. La variation de quantité de mouvement d'un photon se réfléchissant sur la voile est donc $-2\vec{p}_i$. Nous en déduisons la variation de quantité de mouvement des dN photons :

$$\Delta\vec{p} = -2dN\frac{h}{\lambda_m}\vec{u}_x = -2nS\frac{hc}{\lambda_m}dt\vec{u}_x. \text{ Finalement : } \Delta\vec{p} = -S\frac{\phi_r}{c}dt\vec{u}_x.$$

5. La quantité de mouvement du système voile+photon se conserve au cours d'un choc : la variation de quantité de mouvement d'un photon est opposée à celle de la voile résultant de ce choc. Ainsi, la quantité de mouvement cédée par les photons est $\Delta\vec{p}_{\text{voile}} = -\Delta\vec{p} = S\frac{\phi_r}{c}dt\vec{u}_x$.

La quantité de mouvement reçue par la voile par unité de temps est égale à la force $\vec{F}$ subie par celle-ci d'après la loi de la quantité de mouvement : $\vec{F} = S\frac{\phi_r}{c}\vec{u}_x$. La force subie par unité de surface de la voile est la pression exercée sur celle-ci : $P = \frac{\phi_r}{c}$.

6. Numériquement : $F = 1,0 \text{ mN}$. La valeur obtenue est proche de celle annoncée : en dépit de sa simplicité, le modèle fournit un bon ordre de grandeur de la force exercée sur la voile.

Problème II What else !

1. Si on considère un gaz parfait, les particules sont considérées ponctuelles et on néglige les interactions entre les particules (en dehors des collisions). On peut obtenir expérimentalement l'évolution d'un isotherme dans le diagramme de Clapeyron ou le diagramme d'Amagat et comparer avec celle d'un gaz parfait pour déterminer les conditions de validité de l'hypothèse gaz parfait.

2. L'air est constitué de 80% de diazote et de 20% de dioxygène $M_{\text{air}} = 0,8M_{N_2} + 0,2M_{O_2} = 29 \text{ g mol}^{-1}$.

3. Les n_{k-1} moles du corps de pompe occupent un volume V_0 à la température T_0 et à la pression P_{k-1} . On obtient donc à partir de la loi des gaz parfaits : $n_{k-1} = \frac{P_{k-1}V_0}{RT_0}$.

4. Avant que la soupape extérieure ne soit fermée, les n_0 moles du corps du piston occupent un volume V_{max} à la température T_0 et à la pression atmosphérique P_0 . On obtient donc à partir de la loi des gaz parfaits : $n_0 = \frac{P_0V_{\text{max}}}{RT_0}$.

5. Avant que la soupape intérieure ne soit fermée, la quantité de matière occupant le corps de pompe de volume V_0 et le piston de volume V_{min} est $n_0 + n_{k-1}$. Cette quantité d'air est à la pression P_k et à la température T_0 .

Lorsque la soupape intérieure se ferme, il reste n_{k-1} moles de gaz dans le corps de pompe et $\frac{P_kV_{\text{min}}}{RT_0}$ moles dans le piston de volume V_{min} .

La quantité de matière n_k contenue dans le corps de pompe en fin de séquence est donc $n_k = n_0 + n_{k-1} - \frac{P_kV_{\text{min}}}{RT_0}$.

6. On en déduit : $\frac{P_kV_0}{RT_0} = \frac{P_0V_{\text{max}}}{RT_0} + \frac{P_{k-1}V_0}{RT_0} - \frac{P_kV_{\text{min}}}{RT_0}$ soit $P_k = \frac{P_0V_{\text{max}}}{V_0+V_{\text{min}}} + \frac{V_0}{V_0+V_{\text{min}}}P_{k-1}$.

On retrouve donc bien $P_k = \alpha P_{k-1} + \beta$ avec $\alpha = \frac{V_0}{V_0+V_{\text{min}}}$ et $\beta = \frac{P_0V_{\text{max}}}{V_0+V_{\text{min}}}$.

7. On tire de la relation de récurrence précédente que $P_k = \sum_{n=0}^{k-1} \beta \alpha^n + \alpha^k P_0$ avec $\alpha < 1$.

En utilisant le résultat relatif à la somme d'une suite géométrique de raison α , on trouve $P_\infty = \frac{V_{max}}{V_{min}} P_0$.

8. On en déduit $\frac{V_{max}}{V_{min}} = 15$ pour $P_\infty = 15 \text{ bar}$.

Problème III Étude d'une Locomotive Diesel

A Transformations d'un gaz parfait

A.1 $W_{isoV} = 0$ (pas de variation de volume)

A.2 $W_{isoP} = -P(V_f - V_i)$.

A.3 $Q_{isoV} = \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_i) = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma-1}$.

A.4 $Q_{isoP} = \Delta H = \frac{nR\gamma}{\gamma-1}(T_f - T_i) = \gamma \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma-1}$.

A.5 $Q_{isoS} = 0$ (adiabatique)

A.6 Premier principe entre deux états voisins au cours de la transformation : $dU = C_v dT = \delta Q + \delta W = -PdV$ (car $\delta Q = 0$) soit $\frac{nR}{\gamma-1} dT + nRT \frac{dV}{V} = 0$. En divisant par $\frac{nR}{T}$, on obtient $\frac{1}{\gamma-1} \frac{dT}{T} + \frac{dV}{V} = 0$ soit en intégrant $TV^{\gamma-1} = cste$ d'où $PV^\gamma = cste$. On applique sinon le second principe de la thermodynamique : $\Delta S = S_e + S_c$. $S_e = 0$ car la transformation est adiabatique et $S_c = 0$ car la transformation est réversible. En prenant (expression non exigible pris dans le cours) $\Delta S_{if}(T, V) = \frac{nR}{\gamma-1} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i} = 0$. En simplifiant cette expression on obtient $T_i V_i^{\gamma-1} = T_f V_f^{\gamma-1}$ et en utilisant la loi des gaz parfait on obtient $P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma$.

B États thermodynamiques successifs lors du cycle diesel :

B.1 $V_A = 4,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $P_A = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, $T_A = 300 \text{ K}$

B.2 $V_B = 1,50 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $P_B = P_A (\frac{V_A}{V_B})^\gamma = 3,95 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T_B = T_A (\frac{V_A}{V_B})^{\gamma-1} = 444 \text{ K}$

B.3 $V_C = 2,50 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $P_C = P_B = 3,95 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et l'évolution étant isobare on a d'après l'équation des gaz parfait : $T_C = T_B \frac{V_C}{V_B} = 740 \text{ K}$

B.4 $V_D = 4,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $P_D = P_C (\frac{V_C}{V_D})^\gamma = 2,04 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ et $T_D = T_C (\frac{V_C}{V_D})^{\gamma-1} = 613 \text{ K}$.

Résumé :

	A	B	C	D
P (10^5 Pa)	1,0	3,95	3,95	2,04
V (10^{-6} m^3)	400	150	250	400
T (K)	300	444	740	613

C Transformations lors du cycle diesel :

C.1 $A \rightarrow B : W_{AB} = \Delta U_{AB} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_B - T_A) = \frac{P_B V_B - P_A V_A}{\gamma-1} = 48,0 \text{ J}$ et $Q_{AB} = 0$

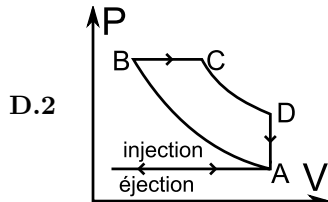
C.2 $B \rightarrow C : W_{BC} = -P_B(V_C - V_B) = -39,5 \text{ J}$ et $Q_{BC} = \Delta H_{BC} = \frac{\gamma}{\gamma-1}(P_C V_C - P_B V_B) = 138 \text{ J}$;

C.3 $C \rightarrow D : W_{CD} = \Delta U_{CD} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_D - T_C) = \frac{P_D V_D - P_C V_C}{\gamma-1} = -42,3 \text{ J}$ et $Q_{CD} = 0$;

C.4 $D \rightarrow A : W_{DA} = 0$ (isochore) et $Q_{DA} = \Delta U_{DA} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D) = \frac{P_A V_A - P_D V_D}{\gamma-1} = -104 \text{ J}$.

D Diagramme de Clapeyron du cycle diesel :

D.1 $W_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = -33,7 \text{ J}$. Le travail est négatif, ce qui correspond à un fonctionnement moteur.



D.3 Le cycle diesel est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre dans le diagramme de Clapeyron. C'est normal puisque cela correspond à un fonctionnement moteur ($W = -\int P dV = -\text{Aire}$, soit $W < 0$).

E Rendement du moteur diesel :

E.1 Le rendement thermodynamique η correspond au rapport de ce que l'on souhaite sur ce que l'on dépense. Ici $\eta = -\frac{W_{tot}}{Q_{BC}}$.

E.2 $\eta = -\frac{W_{tot}}{Q_{BC}} = 0,244.$

E.3 La vitesse maximale de rotation est $N = 1,5.10^3 \text{ tr/min}$ soit la fréquence des cycles est de $f_{cycle} = 25 \text{ Hz}$, on a alors $P_{moteur} = W_{tot} * f_{cycle} = 843 \text{ W}$.

Problème IV Transformations d'une masse de dioxyde de soufre

A Généralités

A.1 cf cours : Pente Solide liquide positive. Point triple : Point où coexistent les trois états de la matière en équilibre.

Point Critique : limite au delà de laquelle, le changement d'état liquide-gaz n'est plus observable.

A.2 cf cours

A.3 L'enthalpie massique de vaporisation est l'énergie qu'il faut fournir à 1 kg de SO_2 pour le faire passer à la température T , de l'état liquide à l'état gazeux.

B Étape $A \rightarrow B$

B.1 La transformation est infiniment lente, le travail reçu par le corps pur s'écrit $W_{AB} = -\int PdV$. La transformation $A \rightarrow B$ est isobare puisqu'il s'agit d'un changement d'état entre de la vapeur saturante et du liquide saturant. On obtient alors en intégrant : $W = +P_0AH$.

B.2 $Q_{AB} = -m\Delta_{vap}h(T_0)$ avec $m = \frac{PVM}{RT} = 2,9.10^{-2} \text{ kg}$ soit $Q_{AB} = -11,7 \text{ kJ}$

B.3 $\Delta U_{AB} = W + Q_{AB} = P_0AH - m\Delta_{vap}h(T_0)$.

B.4 $\Delta S_{AB} = -\frac{m\Delta_{vap}h(T_0)}{T_0}$. L'entropie échangée est égale à $S_e = \frac{Q_{AB}}{T_0} = \Delta S_{AB}$ donc l'entropie créée est nulle et la transformation est réversible.

C Étapes $B \rightarrow C$ et $C \rightarrow A$

C.1 Le corps pur ne subit pas de transformation entre B et C .

C.2 Le corps pur subit une détente dans le vide. Il n'échange donc pas de travail avec l'extérieur : $W_{CA} = 0$.

C.3 On applique le premier principe au corps pur entre les états C et A : $\Delta U_{CA} = Q_{CA} = -\Delta U_{AB}$ puisque l'énergie interne ne dépend pas du chemin suivi. soit $Q_{CA} = -P_0AH + m\Delta_{vap}h(T_0)$.

D Étude du cycle $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$

D.1 U et S étant des fonctions d'état leurs variations sur un cycle est nulle.

D.2 Sur un cycle $\Delta S_{th} = \frac{-Q_{AB}-Q_{CA}}{T_0}$, soit $S_{th} = \frac{P_0AH}{T_0}$

D.3 Sur un cycle $\Delta S = S_e + S_c = 0$ soit $S_c = -S_e = S_{th} = \frac{P_0AH}{T_0} > 0$. L'entropie créée étant positive le cycle est irréversible (transformation $C \rightarrow A$ brutale).

Problème V Air humide

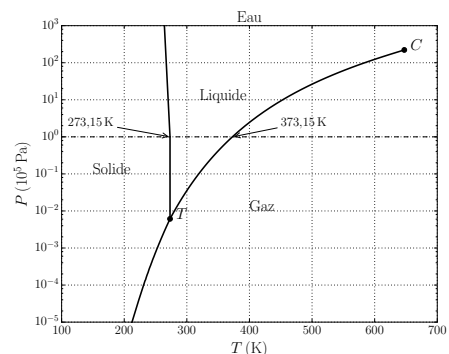
A Généralités

A.1 $\overline{M}_a = x_{N_2}M_{N_2} + x_{O_2}M_{O_2} = (1 - x_{O_2})M_{N_2} + x_{O_2}M_{O_2}$ soit $x_{O_2} = \frac{\overline{M}_a - M_{N_2}}{M_{O_2} - M_{N_2}} = 0,22.$

A.2 $P_{tot} = p_e + p_a.$

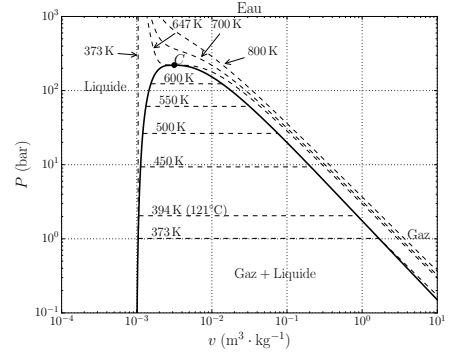
A.3 Point triple : point où coexistent les 3 phases en équilibre.

Point critique : point au delà duquel la transition liquide $\leftrightarrow$ gaz n'est plus observable.



courbe d'ébullition : disparition de la dernière bulle de gaz ou apparition de la première bulle de gaz
 courbe de rosée : disparition de la dernière goutte de liquide ou apparition de la première goutte de liquide.

- A.4** Isotherme : phase liquide (verticale car liquide incompressible), équilibre liquide-gaz (palier de changement d'état à la pression de vapeur saturante), phase gazeuse (portion d'hyperbole dans le cas d'une modélisation par un gaz parfait).



- A.5** Si la pression partielle en eau dans l'air humide dépasse la pression vapeur saturante à la température T , la vapeur d'eau condense et se transforme en gouttelettes d'eau liquide.

B Apparition de buée sur les vitres

- B.1** $p_{e,1}$ est égale à la pression de vapeur saturante à la température $T_{v,1}$ soit $p_{e,1} = 1,23 \times 10^3 \text{ Pa}$ (la buée commence à apparaître).

- B.2** Caractérisation de l'état 1 :

B.2.1 Le diagramme reste identique mais l'échelle des ordonnées est p_e au lieu de P .

B.2.2 l'isotherme $T_{v,1}$ est située au dessous de l'isotherme de la question précédente.

B.2.3 B se trouve dans le domaine de la vapeur sur l'isotherme T_o

B.2.4 C se trouve sur la courbe de rosée à la température $T_{v,1}$ tel que v_B et v_C .

- B.3** paramètres de l'atmosphère **AH** :

B.3.1 $\varepsilon_1 = 100 \frac{p_{e,1}}{P_e^*(T_o)} = 52,6\%$;

B.3.2 $p_{e,1} = x_{e,1} P_{\text{tot}}$ soit $x_{e,1} = 1,22 \times 10^{-2}$;

B.3.3 $\rho_{\text{AH},1} = \frac{P_{\text{tot}}(\bar{M}_a(1 - x_{e,1}) + x_{e,1}M_{\text{H}_2\text{O}})}{RT_o} = 1,19 \text{ kg m}^{-3}$.

- B.4** La masse totale est égale à $m_{\text{tot}} = \rho_{\text{AH},1} V_o = 239 \text{ kg}$ d'où $m_{e,\text{tot}} = x_{e,1} m_{\text{tot}} = 2,91 \text{ kg}$ puisque $m_{e,\text{liq}} \ll m_{e,\text{tot}}$

C Évolution du système

- C.1** En traçant l'isotherme $T_{v,2}$ sur le diagramme de Clapeyron, on constate qu'une diminution de température à volume constant va favoriser la condensation de la vapeur d'eau.

- C.2** Après un temps infini, $p_{e,2} = P_e^*(T_{v,2}) = 872 \text{ Pa}$ de vapeur d'eau dans la salle de classe.

- C.3** Transformation (1) $\rightarrow$ (2) :

C.3.1 A l'équilibre et après un temps infini $p_{e,2} = P_e^*(T_{v,2}) = 872 \text{ Pa}$; On a ainsi $x_{e,2} = \frac{p_{e,2}}{P_{\text{tot}}} = 8,63 \times 10^{-3}$ soit $m_{e,\text{vap}2} = x_{e,2} m_{\text{tot}} = 2,06 \text{ kg}$. La masse m qui s'est liquéfiée est alors de $m = m_{e,\text{tot}} - m_{e,\text{vap}2} = 846 \text{ g}$.

C.3.2 $\Delta H_{1-2} = -m \Delta_{\text{vap}} h(278 \text{ K}) = -2,11 \times 10^3 \text{ kJ}$.

Problème VI Hélium superfluide métastable

A Hélium liquide à basse température

- A.1** On applique le premier principe de la thermodynamique à la masse m d'hélium liquide entre deux instants voisins. En supposant que le transfert thermique est prélevé entre deux instants voisins de façon monobare on a $dH = mc_P(T)dT = \mathcal{P}_{th} dt$ soit $\frac{dT}{dt} = \frac{\mathcal{P}_{th}}{mc_P(T)}$.

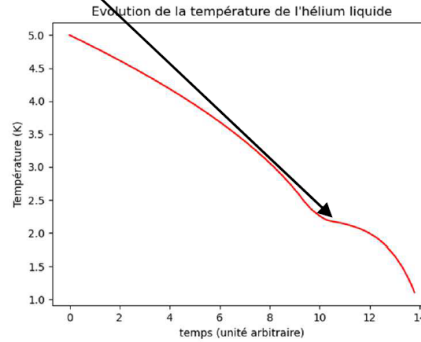
Dans le cas d'une capacité thermique indépendante de la température, nous aurions eu une diminution affine de la température. Ici ce n'est pas le cas et on distingue trois cas :

- Entre 5 K et 2,5 K, c_P diminue (l'énergie qu'il faut prélever pour descendre la température de 1 K diminue) et le refroidissement de la masse d'hélium se fait avec une pente qui augmente en valeur absolue.
- Lorsque T atteint T_λ , l'énergie nécessaire au refroidissement augmente ce qui entraîne un palier dans l'évolution temporelle à la température T_λ (comportement identique à un changement d'état).

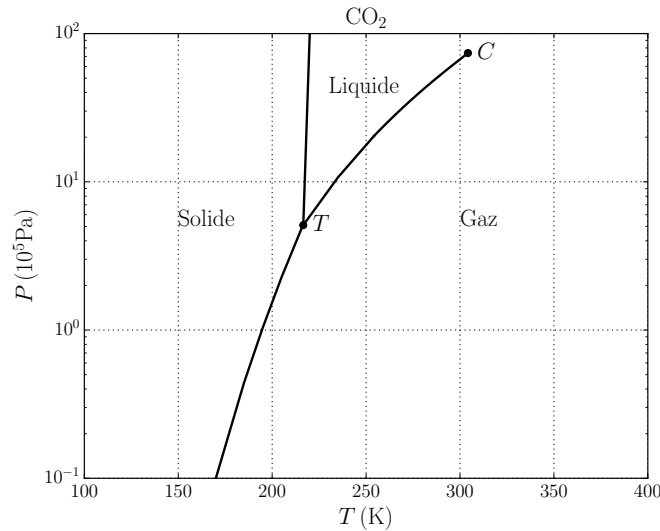
- Lorsque T est compris entre T_λ et 1 K c_P diminue ce qui entraîne une diminution de plus en plus rapide de la température au cours du temps.

Évolution temporelle de la température :

On observe ainsi **un quasi-palier de température** au voisinage de T_λ .



A.2 Diagramme (p, T) typique d'un corps pur typique en équilibre (par exemple du CO₂).

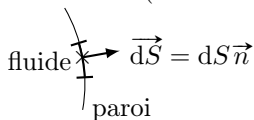


Le diagramme de l'hélium n'a pas de point triple, et de courbe de sublimation. La phase gazeuse et solide ne peuvent coexister à l'équilibre et il existe deux phases liquides.

Pour un corps pur usuel lors du refroidissement d'un système le long de sa ligne de coexistence avec la phase gazeuse, on atteint le point triple et une solidification alors que ce n'est pas le cas de l'hélium où on constate la transition λ .

B États métastables et pression négative

B.1 Pour un gaz parfait, le modèle de la pression cinétique fait intervenir les collisions de particules sur une surface (réelle ou non) : $\vec{dF}_{\text{fluide} \rightarrow \text{paroi}} = P d\vec{S}$



La pression ne peut alors pas être négative puisque le fluide en l'absence de forces d'interaction avec la paroi ne peut exercer une force de la paroi vers le fluide.

Dans le modèle du gaz parfait les interactions entre les particules sont négligées et la pression ($P = \frac{nRT}{V}$) ne peut être négative.

B.2 D'après l'équation d'état de Van der Waals, on peut écrire $p = \frac{Nk_B T}{V - Nb} - a \frac{N^2}{V^2}$. Une pression négative est alors possible si $\frac{aN^2}{V^2} > \frac{Nk_B T}{(V - Nb)}$ soit pour $T < T^* = \frac{aN(V - Nb)}{k_B V^2}$.