

Exercice n°1 : Analyse dimensionnelle

1) Une fréquence est homogène à l'inverse d'un temps : $[f] = T^{-1}$. Dans le système d'unité international, l'unité de fréquence est le Hertz ($1 \text{ Hz} = 1 \text{ s}^{-1}$).

Homogénéité de la masse linéique :

$$[\mu] = \left[\frac{m}{l} \right] = \frac{M}{L}$$

$$[\mu] = M \cdot L^{-1}$$

2) La dimension d'une force peut être déterminée grâce à la deuxième loi de Newton : $F = m \cdot a$. En explicitant :

$$[F] = [m \cdot a]$$

$$[F] = M \cdot L \cdot T^{-2}$$

3) On pose :

$$f = C \cdot l^\alpha \cdot \mu^\beta \cdot F^\gamma$$

En explicitant :

$$[f] = [l]^\alpha \cdot [\mu]^\beta \cdot [F]^\gamma$$

$$T^{-1} = (L)^\alpha \cdot (M \cdot L^{-1})^\beta \cdot (M \cdot L \cdot T^{-2})^\gamma$$

$$T^{-1} = L^{\alpha-\beta+\gamma} \cdot M^{\beta+\gamma} \cdot T^{-2\gamma}$$

Ce qui nous conduit au système d'équations :

$$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ -2 \cdot \gamma = -1 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\gamma = \frac{1}{2} ; \quad \beta = -\frac{1}{2} ; \quad \alpha = -1$$

Soit l'expression de la fréquence de la corde :

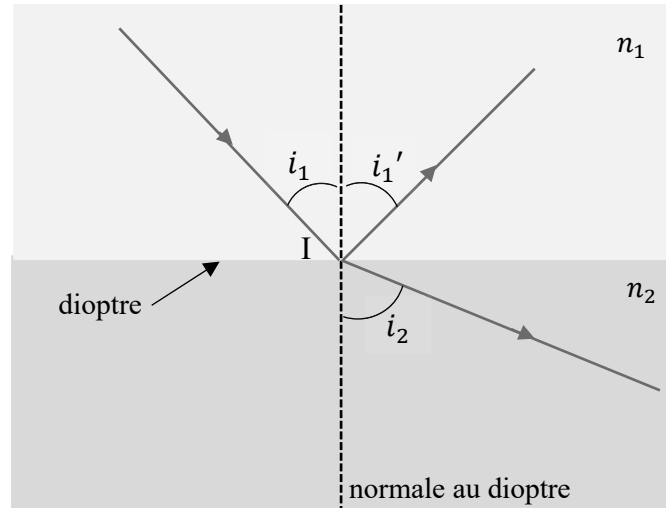
$$f = C \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu \cdot l^2}}$$

4) Si on augmente la force F exercée sur la corde, alors la fréquence augmente donc le son est plus aiguë.

Exercice n°2 : Angle limite et réflexion totale

1) Le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le **plan d'incidence** défini par le rayon incident et la normale au dioptre. Le rayon réfléchi est symétrique au rayon incident par rapport à la normale : $i'_1 = i_1$. Le rayon réfracté est lié au rayon incident par la loi des sinus : $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$.

2) Schéma représentant les rayons incident, réfléchi et réfracté pour $n_2 < n_1$:



Avec $n_2 < n_1$: le rayon s'éloigne de la normale dans le second milieu. En effet, si nous appliquons la loi des sinus en I : $n_1 \cdot \sin i_1 = n_2 \cdot \sin i_2$, si $n_1 > n_2$ alors $\sin i_1 < \sin i_2$ dans le domaine de définition des angles ceci implique que $i_1 < i_2$.

3) Avec $n_2 < n_1$ il existe un angle limite (noté i_L) défini dans le milieu le plus réfringent par :

$$n_1 \cdot \sin i_L = n_2 \cdot \sin(90) = n_2$$

$$\sin i_L = \frac{n_2}{n_1}$$

4) Si l'angle d'incidence i_1 est supérieur à i_L il y a **réflexion totale** dans le milieu d'indice n_1 .

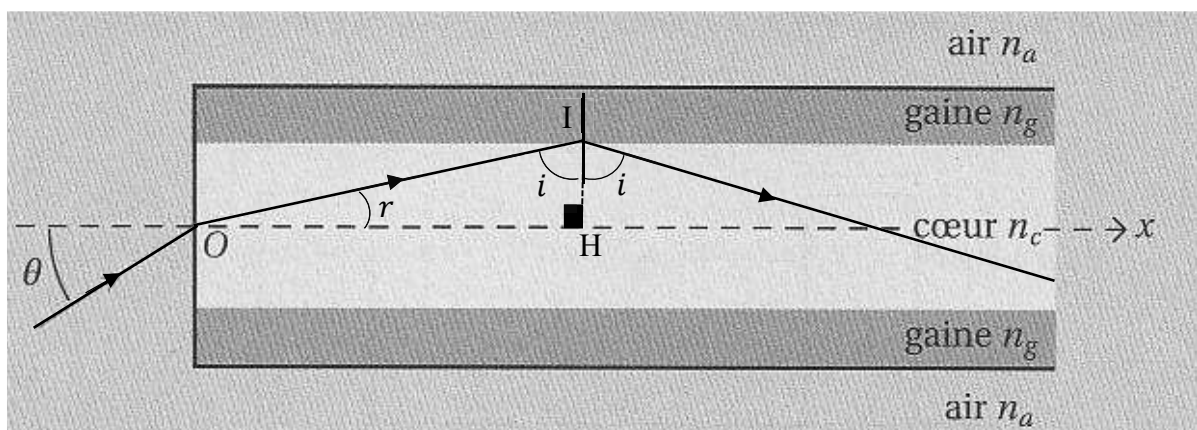
5) A.N. : $i_L = 31,6^\circ$

Problème : Fibre optique à saut d'indice et propagation guidée

A. Angle d'acceptance et ouverture numérique

A.1) Avec $n_g < n_c$, le rayon lumineux peut se propager dans la fibre optique par réflexion totale.

A.2) Propagation du rayon lumineux dans la fibre optique :



A.3) Pour qu'il y ait propagation guidée dans la fibre optique, il faut que $i > i_L$ (cf définition de i sur la figure ci-dessus). Dans le triangle OIH : $r + i = 90$.

Si $i > i_L$ alors $r < r_L$. Les angles r et θ sont liés par la loi des sinus en O : $n_a \cdot \sin \theta = n_c \cdot \sin r$ donc si $r < r_L$ alors :

$$\theta < \theta_a$$

A.4) Appliquons la loi des sinus au point I pour $i = i_L$:

$$n_c \cdot \sin i_L = n_g \cdot \sin(90) = n_g$$

On établit que :

$$\sin i_L = \frac{n_g}{n_c}$$

A.5) Appliquons la loi des sinus au point O pour $i = i_L$ (donc pour $\theta = \theta_a$) :

$$n_a \cdot \sin \theta_a = n_c \cdot \sin r_L$$

Dans le triangle OIH les angles vérifient $r_L + i_L = 90$ donc :

$$r_L = 90 - i_L$$

En explicitant :

$$O. N. = n_a \cdot \sin \theta_a = n_c \cdot \sin(90 - i_L)$$

En notant que :

$$\sin(90 - i_L) = \cos i_L$$

$$O. N. = n_c \cdot \cos i_L$$

Avec $(\cos i_L)^2 + (\sin i_L)^2 = 1$, dans le domaine de définition des angles, on peut poser que :

$$\cos i_L = \sqrt{1 - (\sin i_L)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

$$O. N. = n_c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}$$

On vérifie que :

$$O. N. = \sqrt{n_c^2 - n_g^2}$$

A.N.: $O. N. = 0,560$. Dans l'air $\theta_a = 34,1^\circ$

B. Dispersion intermodale

B.1) Le rayon qui arrive sous incidence normale ($\theta = 0$) dans la fibre met un temps minimum :

$$T_1 = \frac{L}{v_c}$$

où est la vitesse de la lumière dans le cœur de la fibre. En notant que : $v_c = c/n_c$

$$T_1 = \frac{n_c \cdot L}{c}$$

B.2) Le rayon qui arrive sous un angle proche de l'angle d'acceptance met le temps maximum. Si on note L' la distance parcourue par ce rayon dans le cœur de la fibre :

$$T_2 = \frac{n_c \cdot L'}{c}$$

Par construction, on peut poser que :

$$\sin i_L = \frac{L}{L'}$$

En notant que :

$$\sin i_L = \frac{n_g}{n_c}$$

On établit que :

$$L' = \frac{L}{\sin i_L} = \frac{n_c \cdot L}{n_g}$$

On en déduit que :

$$T_2 = \frac{n_c^2 \cdot L}{n_g \cdot c}$$

B.3) La différence de temps de parcours entre les deux rayons est :

$$\delta t_m = T_2 - T_1 = \frac{n_c^2 \cdot L}{n_g \cdot c} - \frac{n_c \cdot L}{c}$$

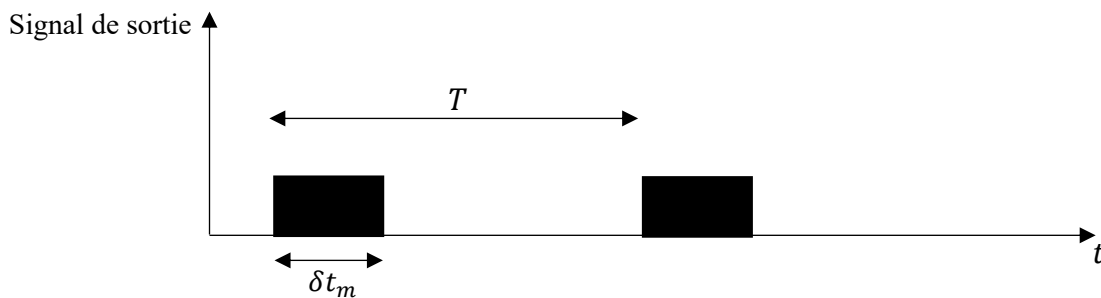
On vérifie que :

$$\delta t_m = \frac{n_c \cdot (n_c - n_g) L}{n_g \cdot c}$$

A.N. : $\delta t_m = 3,6 \mu s$

B.4) Si on néglige l'absorption lumineuse dans la fibre, l'énergie est constante mais chaque pulse subit un étalement temporel de δt_m .

Allure du signal pour $\delta t_m < T$:



Pour $\delta t_m > T$, les signaux se superposent... Il n'est plus possible de distinguer les différents pulses.

B.5) A la limite de saturation de la fibre : $T_{min} = \delta t_m$. En notant que $BP_m = 1/T_{min}$:

$$BP_m = \frac{1}{\delta t_m}$$

En explicitant :

$$BP_m = \frac{n_g \cdot c}{n_c \cdot (n_c - n_g) \cdot L}$$

B.6) A.N. : $BP_m = 2,8 \cdot 10^5 \text{ bits} \cdot s^{-1}$

B.7) Si on note τ le temps nécessaire pour transmettre un fichier de $100 \text{ Mo} = 8,00 \cdot 10^8 \text{ bits}$:

$$\tau = \frac{8,0 \cdot 10^8}{2,8 \cdot 10^5} = 2,8 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$\tau = 47 \text{ min}$$

Le temps de transfert du fichier est très long !... la dispersion intermodale limite considérablement l'intérêt des fibres à saut d'indice.

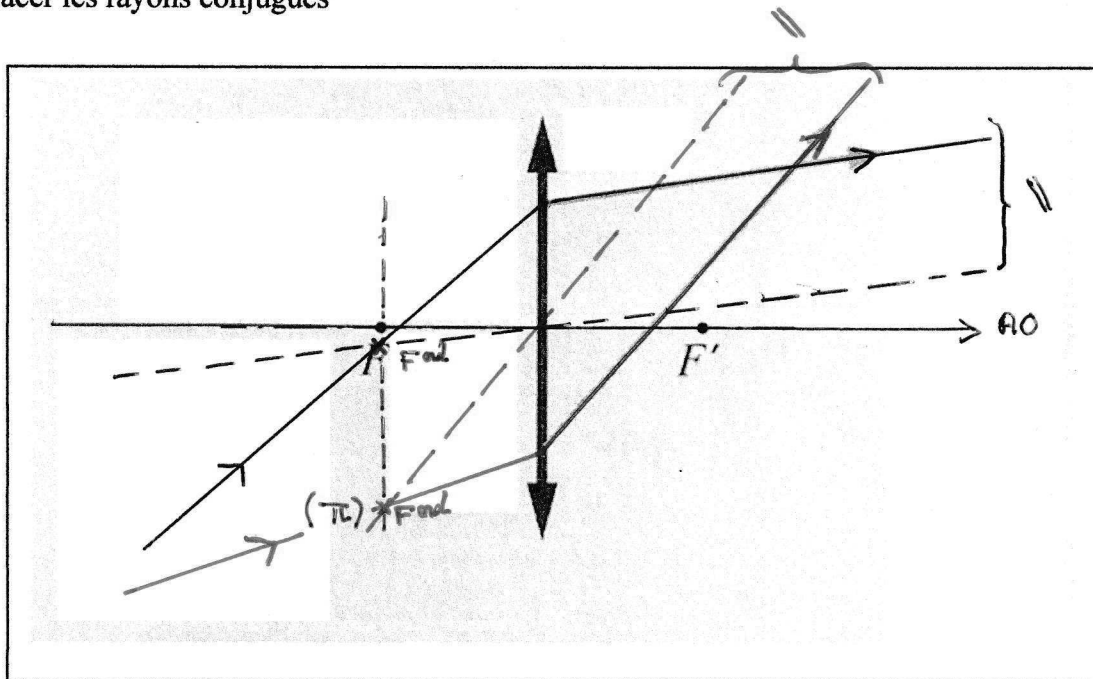
B.8) Pour que le rayon lumineux reste piégé dans la fibre à *gradient d'indice*, il faut que :

$$\frac{dn_1(r)}{dr} < 0$$

C'est-à-dire que l'indice optique de la fibre diminue quand la distance à l'axe augmente. Dans une fibre à gradient d'indice, le rayon adopte une trajectoire quasi- sinusoïdale.

Exercice n°3 : tracés de rayons lumineux (document à rendre avec la copie)

1) Tracer les rayons conjugués



2) Déterminer la position des foyers objet et image de la lentille

