TD Mécanique n° 1

Cinématique du point et du solide

Capacités exigibles :

- Établir les expressions des composantes des vecteurs position, vitesse et accélération ◐.
- Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé ✠.

Exercice 1 Vitesse d'un mobile ◐

L'équation horaire du mouvement d'un mobile est la suivante.
Montrer que $\vec{V}$ fait un angle constant avec l'axe Oz. Quelle est la valeur de cet angle ?

$$\begin{pmatrix} x = 4t^2 \\ y = 4(t - t^3/3) \\ z = 3t + t^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Mouvements rectilignes simultanés ◐✠

Soit une voiture de largeur L en mouvement le long d'un trottoir rectiligne $x'x$. Un piéton décide de traverser la route au moment où la voiture se trouve à une distance D. Le mouvement du piéton est rectiligne, uniforme, de vitesse $\vec{v}$, incliné d'un angle φ par rapport à l'axe Oy. La voiture se déplace à la vitesse constante $\vec{V} = V\vec{u_x}$. Quelle doit être la valeur de φ afin que la collision avec la voiture soit évitée, dans le cas d'une valeur minimale de la norme v de $\vec{v}$ que l'on précisera ?

Exercice 3 Équation horaire en coordonnées polaires ◐

L'équation horaire du mouvement d'un point en coordonnées polaires est la suivante : $r = be^{\frac{-t}{\tau}}$ et $\theta = \omega t$.

1. Calculer la vitesse et l'accélération de ce point.
2. En déduire leur norme.
3. Déterminer l'angle entre le vecteur position et le vecteur vitesse.

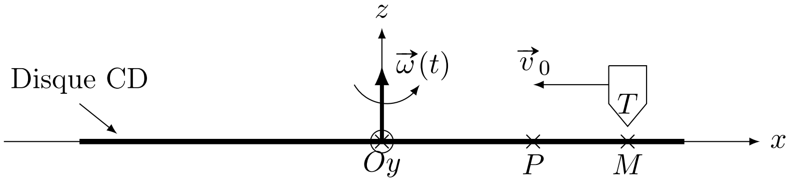
Exercice 4 Trajectoire cycloïdale ◐✠

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur un axe horizontal Ox. Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle θ que fait un rayon fixé de la roue avec la position initiale à $t = 0$.

1. Quelles sont à l'instant t, les coordonnées cartésiennes du point M de la périphérie de la roue qui coïncidait avec O pour $\theta = 0$.
2. Calculer en fonction de R et θ les composantes de la vitesse et de l'accélération du point M.
3. Donner les valeurs des composantes de la vitesse et de l'accélération de M au moment où celui-ci touche à nouveau l'axe Ox.
4. On suppose maintenant que le mouvement du centre de la roue est rectiligne uniforme à la vitesse V_0. Calculer la norme de l'accélération en fonction de V_0 et R. AN : $V_0 = 130\ km.h^{-1}$ et $R = 35\ cm$.

Exercice 5 Lecteur de CD ◐✠

Lors de la lecture d'un disque CD, la tête de lecture (T) se déplace au-dessus du disque selon un axe Ox à la vitesse $v_0 = 8{,}0\,\mu\mathrm{m\,s^{-1}}$, de la périphérie vers le centre. Son abscisse est notée $x(t)$. Le disque tourne autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{u_z}$ variable de sorte que la vitesse du point M du disque « lu » par la tête de lecture ait toujours la même valeur v_1.



Lorsque la lecture du disque commence $x = x_{\max} = 5{,}8\,\mathrm{cm}$ et $\omega = \omega_0 = 200\,\mathrm{tours\,min^{-1}}$. Lorsqu'elle se termine $x = x_{\min} = 2{,}5\,\mathrm{cm}$.

1. Calculer la valeur de v_1.
2. Établir l'expression de $x(t)$ et en déduire celle de $\omega(t)$.
3. Calculer la durée de lecture du CD ainsi que la vitesse angulaire de celui-ci en fin de lecture.
4. On considère un point fixe P du CD situé à la distance r de l'axe de rotation. Exprimer ses vecteurs vitesse et accélération à toute date t.

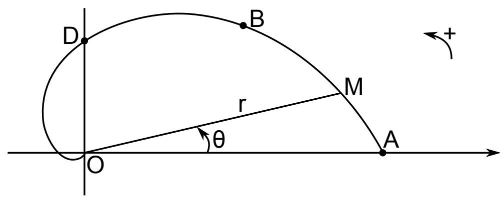
Exercice 6 Poursuite de chiens ◐✠

Quatre chiens sont placés aux sommets A, B, C et D d'un carré de centre O et de demi diagonale $a = OA$. À la date $t = 0$, chaque chien se met à courir vers son voisin avec une vitesse $\vec{v}$ qui garde une norme v_0 constante. On repère la position du chien M initialement en A par ses coordonnées polaire $(r(t), \theta(t))$. On admettra que pour des raisons de symétrie, les quatre chiens forment à tout instant $t \geq 0$ un carré.

1. Exprimer en fonction de v_0 les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ du chien M dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
2. En déduire le système des deux équations différentielles vérifiées par $r(t)$ et $\theta(t)$.
3. Établir les lois horaires $r(t)$ et $\theta(t)$, en fonction de a et v_0. À quelles date t_f les quatre chiens se rejoignent-ils ?
4. Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire suivie. Quelle est sa nature ?

Exercice 7 Déplacement d'un animal*** ◐✠

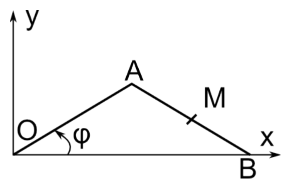
On repère la position d'un animal (point matériel M de masse m) se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ de pôle O. L'allure de la trajectoire pour θ variant de 0 à 2π est la suivante :



Il décrit une spirale logarithmique d'équation $r = ae^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a constante positive. Le mouvement est défini par la loi horaire : $\theta = \omega t$ où la vitesse angulaire ω est une constante positive.

1. Reproduire la figure ci-dessus et dessiner aux points A, B et D les vecteurs de la base locale $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.
2. Exprimer dans cette base locale les vecteurs vitesse et accélération du point matériel.
3. Calculer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?
4. Donner les composantes du vecteur vitesse aux points $A(\theta = 0)$ et $D(\theta = \frac{\pi}{2})$ en fonction de a et de ω, et celles du vecteur accélération aux mêmes points en fonction de a et ω^2.
5. En précisant l'échelle choisie pour $a\omega$ et $a\omega^2$, dessiner les vecteurs vitesses et accélération aux points A et D. Commenter.

Exercice 8 Rotation et translation ◐✠



Soit le système ci-contre, constitué de deux tiges identiques, de longueur $2a$, OA et AB articulées en A. La tige OA peut pivoter autour du point O, et l'extrémité de la tige AB peut coulisser le long de l'axe (Ox). L'angle φ vérifie $\varphi = \omega t$ avec $\omega = \text{cste}$.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du milieu M de AB.
2. Déterminer l'accélération du point M

Solutions des exercices

[1]*Réponse :* $\theta = 53,1\,°$

[2]*Réponse :* $\tan\varphi_m = \frac{L}{D}$ *et* $v_m = \frac{VL}{\sqrt{D^2+L^2}}$

[3]*Réponses : 1)* $\vec{v} = -\frac{b}{\tau}e^{\frac{-t}{\tau}}\vec{u_r} + \omega b e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u_\theta}$ *et* $\vec{a} = b\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)e^{\frac{-t}{\tau}}\vec{u_r} - 2\frac{\omega b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u_\theta}$ *; 2)* $v = b\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}\,e^{\frac{-t}{\tau}}$, $a = b\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)e^{\frac{-t}{\tau}}$ *; 3)* $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2\tau^2}}$

[4]*Réponses : 2)* $\vec{v} = R\dot{\theta}(1 - \cos\theta)\vec{u_x} + R\dot{\theta}\sin\theta\vec{u_y}$ *; 3)* $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{u_y}$ *; 4)* $a = \frac{V_0^2}{R}$

[5]*Réponses : 1)* $v_1 = 1{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ *; 2)* $\omega(t) = \dfrac{v_1}{x_{\max} - v_0 t}$ *; 3)* $t_L = 4{,}1 \times 10^3\,\mathrm{s}$, $\omega(t_L) = 49\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

[6]*Réponses : 1)* $\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(-\vec{u_r} + \vec{u_\theta})$ *; 2)* $\dot{r} = -\frac{v_0}{\sqrt{2}}$, $r\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$ *; 4)* $r = ae^{-\theta}$

[7]*Réponses : 2)* $\overrightarrow{v(M)} = a\omega e^{-\omega t}(-\vec{u_r} + \vec{u_\theta})$, $\overrightarrow{a(M)} = -2a\omega^2 e^{-\omega t}\vec{u_\theta}$ *; 3)* $||\vec{v}|| = \sqrt{2}a\omega e^{-\omega t}$

[8]*Réponses :* $\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2}$; $\vec{a} = -\omega^2\overrightarrow{OM}$