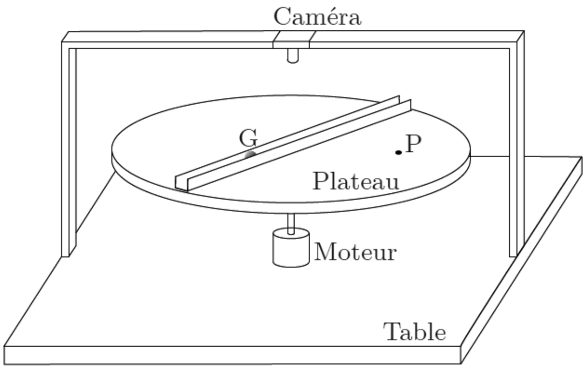
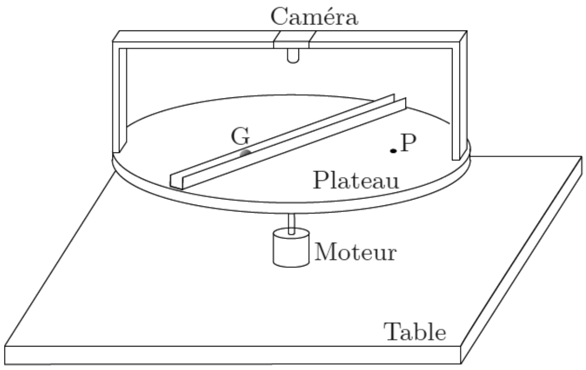
M1 Cinématique du point et du solide

La cinématique est la discipline de la mécanique qui étudie le mouvement des corps, en faisant abstraction des causes du mouvement. Cette étude du mouvement nécessite un repérage dans l'espace et dans le temps.

Dans ce chapitre on se servira comme fil rouge de l'expérience présentée ci-dessous. Un plateau est mis en rotation à une vitesse angulaire constante ω par rapport à la table. Sur ce plateau une bille de centre G est susceptible de se déplacer dans une gouttière. Les expériences sont filmées soit par une caméra solidaire de la table, soit par une caméra solidaire du plateau.





I Repérage d'un point ou d'un solide

En physique et notamment en mécanique on travaille dans un espace à trois dimensions. Pour repérer un point M, il faut donc connaître les composantes du vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ dans un système de coordonnées judicieusement choisi.

I.1 Repérage d'un solide

I.1.a) Définition d'un solide

Un solide indéformable est un système matériel (S) dont les distances entre deux points quelconque de (S), restent invariable au cours du temps.

$$\forall (N, P) \in S \qquad ||\overrightarrow{NP}|| = cste$$

Un système de coordonnées est dit lié à un solide lorsque l'origine et les axes de ce système sont fixes par rapport au solide.

Le plateau et la bille peuvent ici être considérés comme des solides indéformables.

I.1.b) Repérage d'un solide dans l'espace

Repérer le solide dans l'espace revient à situer le repère lié au solide par rapport à un repère de référence. Pour cela, six paramètres sont généralement nécessaires :

- les trois coordonnées d'un point du solide : par exemple celle de l'origine du repère lié au solide.
- trois angles qui définissent l'orientation des axes du repère lié au solide par rapport au référentiel d'étude.

I.2 Notion de point matériel

I.2.a) Définition d'un point matériel

On appelle point matériel un solide dont la position est entièrement définie par la seule donnée des trois coordonnées d'un point du solide. Ce point est également affecté de caractéristiques physiques du solide parmi lesquelles la masse, la charge la force appliquée. . .Cela revient à négliger tout effet de rotation du solide sur lui même ou son extension spatiale.

Ici la bille peut être assimilable à un point matériel si son énergie cinétique de rotation est négligeable devant son énergie cinétique de translation.

I.2.b) Validité du modèle

Même si la validité de ce concept peut être remis en cause (par exemple mouvement d'un ballon de rugby ou d'un ballon de foot), l'approximation d'un solide par un point matériel permet dans un grand nombre d'expériences d'interpréter correctement la trajectoire observée. De plus lorsque cette approximation n'est plus possible, l'étude du mouvement d'un solide se fera à partir du mouvement du centre d'inertie de celui-ci.

I.3 Mesure de distance

On repère la position des points (points matériels ou point appartenant à un solide) avec l'unité de longueur du système international : le mètre.

La définition actuelle du mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide pendant une durée de $\frac{1}{299792458}$ seconde.

Ordres de grandeurs :

- rayon du noyau atomique : de l'ordre du fermi $10^{-15}\ m$
- rayon atomique : $10^{-10}\ m$
- rayon de la Terre : $6380\ km$
- distance Terre-Soleil : $1,495.10^{11}\ m$

I.4 Systèmes usuels de coordonnées

I.4.a) Bases orthonormées directes

En mécanique toute base (Ensemble de vecteurs linéairement indépendants) $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ est supposée orthonormée directe :

- $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ sont unitaires $||\overrightarrow{u_1}|| = ||\overrightarrow{u_2}|| = ||\overrightarrow{u_3}|| = 1$,
- $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$ sont orthogonaux entre eux,
- Le sens de $\overrightarrow{u_3}$ est donné par « la règle du tire-bouchon ».

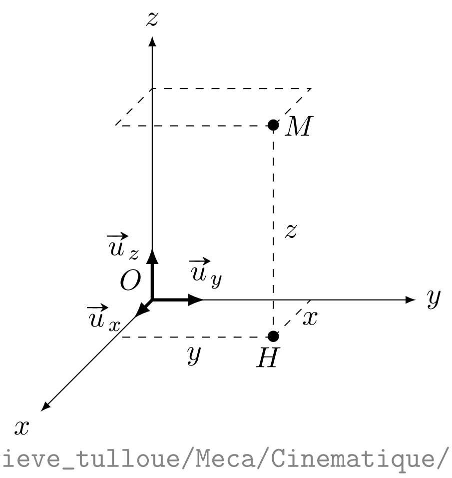
I.4.b) Coordonnées cartésiennes

Dans ce repère la position d'un point M est définie par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dont les composantes (x, y, z) sont telles que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$$

- x est l'abscisse $x \in]-\infty; +\infty[$
- y est l'ordonnée $y \in]-\infty; +\infty[$
- et z est la cote $z \in]-\infty; +\infty[$

Ce système de coordonnées est celui auquel on pense le plus souvent mais ce n'est pas forcément le plus adapté à la symétrie du problème, notamment lorsque les points matériels se déplacent sur des cercles. Dans le cas du mouvement de la bille par rapport au plateau le système de coordonnées cartésiennes est adapté.



http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cartesiennes.php

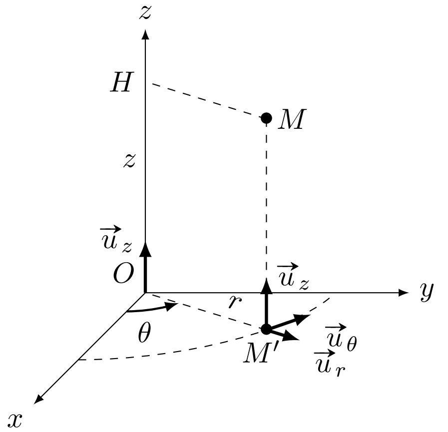
I.4.c) Coordonnées cylindriques et polaires

Lorsqu'on étudie le mouvement de rotation d'un point M autour d'un axe, on introduit pour simplifier les calculs le système de coordonnées cylindriques. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ s'écrit alors :

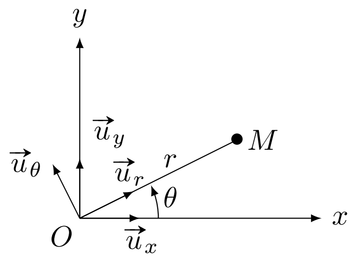
$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} = r\overrightarrow{u_r} + z\overrightarrow{u_z}$$

- r est le rayon polaire $r \in [0; +\infty[$
- θ est l'angle polaire $\theta \in [0; +2\pi[$
- et z est la cote $z \in]-\infty; +\infty[$

Le vecteur orthoradial $\overrightarrow{u_\theta}$ s'obtient par une rotation de $\frac{\pi}{2}$ de $\overrightarrow{u_r}$, autour de l'axe $\overrightarrow{u_z}$. Lorsque le mouvement est plan ($z = 0$) on se place dans la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, on a alors $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$.



Lorsque le mouvement se fait dans un plan (Ox,y), on se limite aux coordonnées polaires. Dans ce cas $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$.



http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_cylindriques.php

On peut relier les coordonnées polaires d'un point à ses coordonnées cartésiennes. Il suffit pour cela de choisir l'axe (Ox) par exemple comme axe de référence pour l'angle de rotation θ et de projeter sur les axes (Ox) et (Oy). On peut inverser ce système d'équations pour obtenir l'expression des coordonnées cylindriques en fonction des coordonnées cartésiennes :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan\frac{y}{x}\ [\pi] \end{array}\right.$$

I.4.d) Coordonnées sphériques

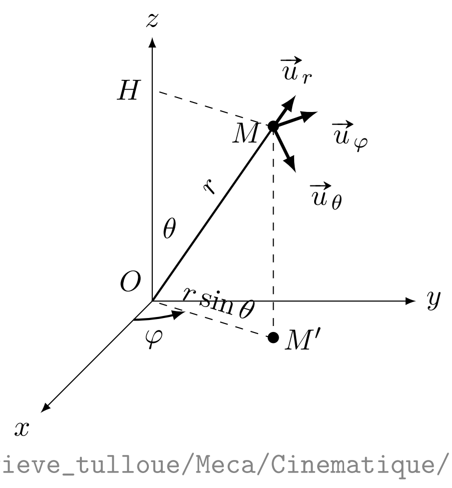
Lorsque des grandeurs physiques, en un point M quelconque de l'espace dépendent de la distance r à un certain point O. M peut être décrit par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) tel que $r = OM$, $\theta = (\overrightarrow{Oz}, \overrightarrow{OM})$ et $\varphi = (\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OH})$, H étant le projeté de M sur l'axe xOy. Le vecteur position s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_r}$$

- r est le rayon $r \in [0; +\infty[$
- θ est la colatitude $\theta \in [0; \pi]$
- et φ est la longitude $\varphi \in [0; 2\pi[$

La base orthonormée $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ est définie par :

- $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire suivant $\overrightarrow{OM}$
- $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur orthogonal à $\overrightarrow{u_r}$ et qui appartient au plan (zOM)
- $\overrightarrow{u_\varphi}$ le vecteur orthogonal au point M au plan (zOM), la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$ étant directe.



http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/coord_spheriques.php

I.5 Déplacement élémentaire

Les déplacements élémentaires s'obtiennent en faisant varier de manière élémentaire chacune des coordonnées du système de coordonnées considéré.

I.5.a) Coordonnées cartésiennes

Dans le cas des coordonnées cartésiennes, le déplacement élémentaire d'un point M de coordonnées (x, y, z) correspond a son déplacement jusqu'au point M' $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$. On a donc $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$, soit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

I.5.b) Coordonnées cylindriques et polaires

Le déplacement élémentaire d'un point M (r, θ, z) correspond à son déplacement jusqu'au point M' $(r + \mathrm{d}r, \theta + \mathrm{d}\theta, z + \mathrm{d}z)$. On a donc $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$. Les variables r, θ et z étant indépendantes, l'expression du déplacement élémentaire est donc la somme des déplacements élémentaires correspondant à la variation d'une seule variable. On a alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

Lorsque $z = cste$, $\mathrm{d}z = 0$, on obtient alors le déplacement élémentaire en coordonnées polaires : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$.

Paramètre		Déplacement élémentaire engendré			Vecteur
Nom	Var.	Nature	Longueur	Direction	dépl. élém.
r	$\mathrm{d}r$	Segment de droite	$\mathrm{d}r$	$\vec{u}_r$	$\mathrm{d}r\vec{u}_r$
θ	$\mathrm{d}\theta$	Arc de cercle de centre H, de rayon r, d'angle au centre $\mathrm{d}\theta$	$r\mathrm{d}\theta$	$\vec{u}_\theta$	$r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$
z	$\mathrm{d}z$	Segment de droite	$\mathrm{d}z$	$\vec{u}_z$	$\mathrm{d}z\vec{u}_z$

I.5.c) Coordonnées sphériques

De la même façon, on peut montrer qu'en coordonnées sphériques le déplacement élémentaire s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u_\varphi}$$

Paramètre		Déplacement élémentaire engendré			Vecteur
Nom	Var.	Nature	Longueur	Direction	dépl. élém.
r	$\mathrm{d}r$	Segment de droite	$\mathrm{d}r$	$\vec{u}_r$	$\mathrm{d}r\vec{u}_r$
θ	$\mathrm{d}\theta$	Arc de cercle de centre O, de rayon r, d'angle au centre $\mathrm{d}\theta$	$r\mathrm{d}\theta$	$\vec{u}_\theta$	$r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta$
φ	$\mathrm{d}\varphi$	Arc de cercle de centre H, de rayon $r\sin(\theta)$, d'angle au centre $\mathrm{d}\varphi$	$r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi$	$\vec{u}_\varphi$	$r\sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$

II Vecteurs vitesse et accélération

II.1 Référentiel

II.1.a) Repère de temps

Pour connaître l'instant d'existence d'un phénomène physique, un observateur se réfère à une échelle de temps. On se place dans le cadre de la mécanique classique où le temps est absolu : la mesure du temps est la même pour tout observateur.

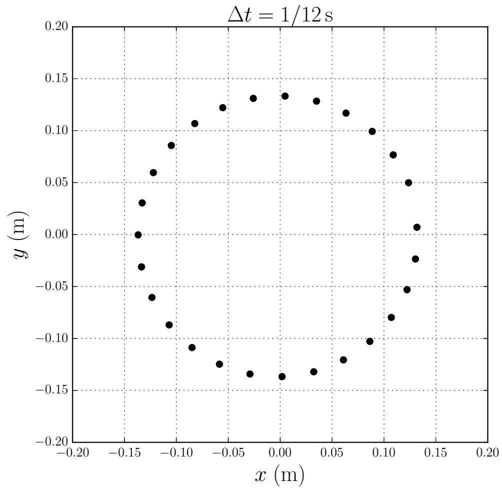
Unité de temps : La seconde (s) est définie comme la durée de 9192631770 périodes d'une radiation émise par un atome de cesium 133.

II.1.b) Définition d'un référentiel

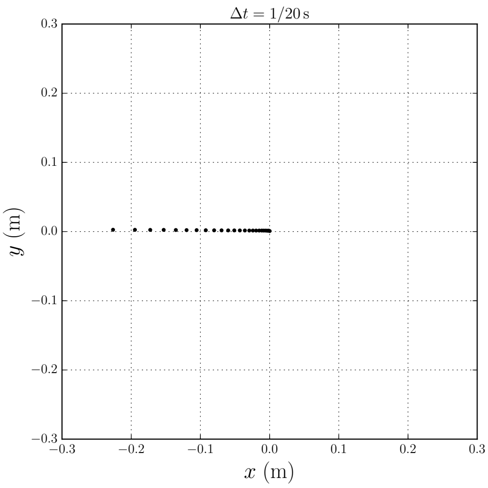
On appelle référentiel $\mathcal{R}$ lié à un solide (S) de référence le repère d'espace temps qui associe une échelle de temps à un repère spatial R lié à (S).

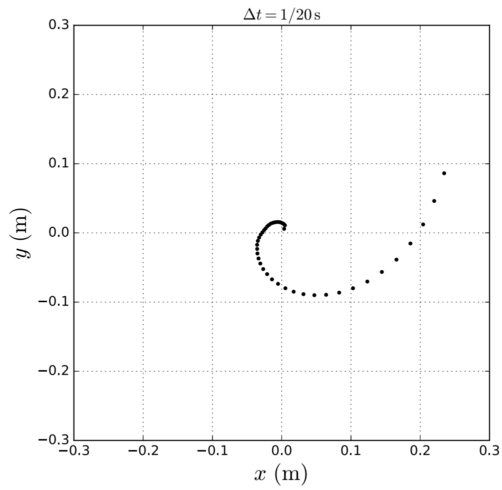
II.1.c) Retour sur l'expérience introductive

Les figures suivantes montrent les positions des points P et G, relevées par analyse de la vidéo en utilisant un repère $(O,\ \vec{u}_x,\ \vec{u}_y,\ \vec{u}_z)$ fixe par rapport à la caméra (axe Oz confondu avec l'axe de rotation). L'intervalle de temps entre deux points est Δt.



Mouvement de P, caméra liée à la table.





Mouvement de G, caméra liée au plateau.

Mouvement de G, caméra liée à la table.

Le mouvement d'un point dépend du référentiel dans lequel l'observation est réalisée.

II.2 Position, équation horaire et trajectoire d'un point matériel

- **La position** d'un point matériel M dans un référentiel $\mathcal{R}$ est défini à l'aide du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ où O est un point fixe dans $\mathcal{R}$ ou des composantes de $\overrightarrow{OM}$ dans la base de projection choisie.
- Le mouvement d'un point matériel M dans $\mathcal{R}$ est décrit par son **équation horaire** : $\overrightarrow{OM}(t)$ ou ses composantes dans la base choisie. Par exemple $(x(t), y(t), z(t))$.
- La courbe décrite par M au cours du mouvement est la **trajectoire**. Dans l'équation de la trajectoire, la variable temporelle ne doit plus apparaître. Exemple : Déterminer l'équation de la trajectoire définit par l'équation horaire suivante : $x(t) = r\cos\omega t$, $y(t) = r\sin\omega t$ et $z(t) = 0$.