Éléments de correction du DM n° 3

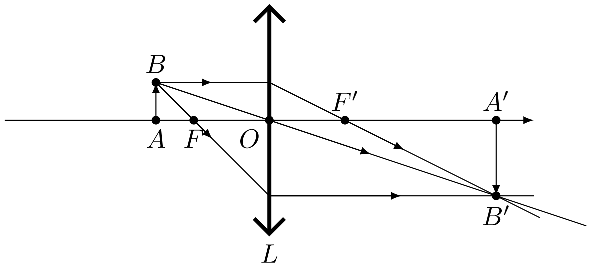
Instruments d'optique – Superposition d'ondes

Problème 1 Mesure d'une focale à l'aide d'un œil myope

A Généralités

A.1 Dans les conditions de Gauss, on ne considère que des rayons proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à cet axe. Cela permet ainsi d'obtenir un stigmatisme et un aplanétisme approché.

A.2 $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$.



B Étude d'un viseur à frontale fixe

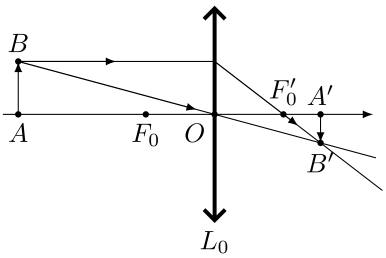
B.1 Pour qu'un œil normal n'accommode pas, l'image formée par l'oculaire doit se former à l'infini. Le réticule doit alors se trouver dans le plan focal objet de l'oculaire : $d = f_2'$.

B.2

B.2.1 L'image est nette si elle se forme sur la rétine donc à la distance d' de L_0. En appliquant la relation de conjugaison de Descartes on obtient : $\boxed{f_0' = \frac{d_1 d'}{d'+d_1} = 1,3\ cm}$ pour le ponctum proximum.

B.2.2 De la même façon, on obtient $\boxed{f_0' = 1,48\ cm}$ pour le ponctum remotum (1,5 cm avec 2CS mais cela impliquerait que cette image se trouve sur le plan focal image de la lentille, soit un objet situé à l'infini, ce qui n'est pas le cas pour cet œil myope).

B.2.3 L'image B' se forme sur la rétine donc à l'intersection du rayon issu de B et non dévié en passant par O et de la rétine.



B.3

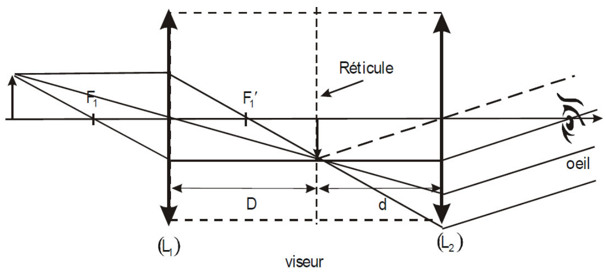
B.3.1 L'image en sortie de viseur doit se trouver au punctum remotum de l'œil soit à $d_2 = 1,2m$ de L_0 (et de L_2).

B.3.2 En appliquant la relation de conjugaison à la lentille L_2 on trouve $\boxed{d = \frac{f_2' d_2}{d_2+f_2'} = 2,9\ cm}$

B.4

B.4.1 Pour voir l'objet à travers le viseur, il faut que son image par l'objectif se forme dans le plan du réticule. En appliquant la formule de conjugaison à l'objectif on trouve $\boxed{\overline{O_1A} = \frac{Df_1'}{f_1'-D} = -14\ cm}$

B.4.2 Quelque soit la nature de l'œil, l'image intermédiaire doit être dans le plan du réticule pour que leurs images soient vues nettes simultanément.



B.4.3

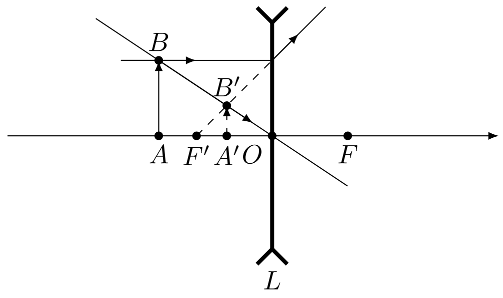
B.4.4 Pour voir nettement et simultanément l'image finale et le réticule, il faut que l'objet se situe à la distance fixe $\overline{O_1A} = -14\ cm$ de l'objectif.

C Mesure de distances focales

C.1 $\overline{OA} = -20\ cm$ et $\overline{OA'} = -10\ cm$.

C.2 En appliquant la relation de conjugaison à la lentille inconnue, on trouve $f' = -20\ cm$ (lentille divergente).

C.3

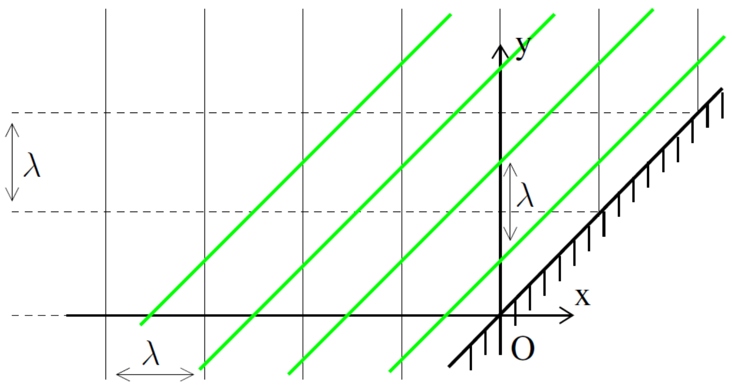


Problème 2 La flûte de Pan

1. Un nœud de vibration est un point où, pour tout instant t, l'amplitude de l'onde stationnaire est nulle ; un ventre de vibration est un point où, pour tout t, l'amplitude de l'onde stationnaire est maximale.
2. Une amplitude nulle (nœud) correspond à $\cos(kx_n + \varphi) = 0$. On en déduit :
$$kx_n + \varphi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad \text{soit} \quad x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} \quad \text{et} \quad x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$
Une amplitude maximale (ventre) correspond à $\cos(kx'_n + \varphi) = \pm 1$ On en déduit :
$$kx'_n + \varphi = n\pi \quad \text{soit} \quad x'_n = n\frac{\pi}{k} - \frac{\varphi}{k} \quad \text{et} \quad x'_n = n\frac{\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$
On obtient donc $x_{n+1} - x_n = \dfrac{\lambda}{2}$, $x'_{n+1} - x'_n = \dfrac{\lambda}{2}$ et $x_n - x'_n = \dfrac{\lambda}{4}$: deux nœuds ou deux ventres successifs sont distants de $\lambda/2$, un nœud et un ventre successifs sont distants de $\lambda/4$.
3. 3.a. D'après la question précédente, la longueur du tuyau et la longueur d'onde de l'onde stationnaire sont forcément liées par une relation du type $L = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}$, où $n \in \mathbb{N}$. Pour s'en convaincre, on peut représenter le mode fondamental, et les deux premiers modes vérifiant un ventre à gauche et un nœud à droite. Comme $\lambda = \dfrac{c}{f}$ où f est la fréquence de l'onde, les fréquences propres s'écrivent :
$$f_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{c}{2L} \text{ avec } n \in \mathbb{N}.$$
3.b. La fréquence fondamentale correspond à $n = 0$: $f_0 = \dfrac{c}{4L} = 262\,\text{Hz}$. Le tuyau doit posséder une longueur $L = 32{,}6\,\text{cm}$ pour émettre un Do_3.

Problème 3 Réflexion d'une onde sonore sur un mur

1. L'onde incidente se propage suivant les x croissants, soit $p_i(x,t) = P_0\cos(\omega t - kx + \varphi)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$. Le choix de la phase nulle à l'origine des temps impose $\varphi = 0$ soit $\boxed{p_i(x,t) = P_0\cos(\omega t - kx)}$.
2. Les plans d'onde (surfaces équiphases) sont distants d'une distance ℓ telle que $k\ell = 2\pi$, donc $\boxed{\ell = \frac{2\pi c}{\omega} = \lambda}$ (longueur d'onde). Ces plans d'ondes sont représentés sur le schéma ci-dessous en traits fins continus.

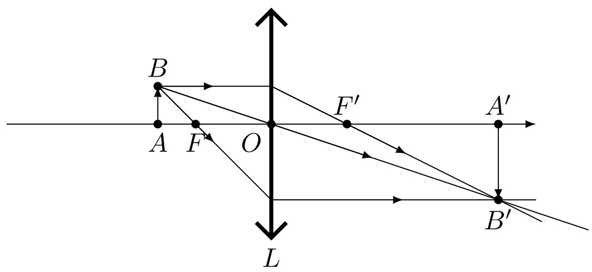


3. L'onde réfléchie se propage suivant les y croissants soit $p_r(y,t) = P_0 \cos(\omega t - ky + \varphi)$ avec $k = \frac{\omega}{c}$. L'onde réfléchie étant en phase avec l'onde incidente, on a $\varphi = 0$ soit $\boxed{p_r(y,t) = P_0 \cos(\omega t - ky)}$.
4. Les plans d'ondes sont représentés en pointillé sur la figure ci-dessus et sont également distant de λ.
5. La surpression totale est la somme de la surpression incidente et de la surpression réfléchie : $p(x,y,t) = p_i(x,t) + p_r(y,t)$. En utilisant la formule de trigonométrie fournie, on obtient :
$\boxed{p(x,y,t) = 2P_0 \cos(\frac{k}{2}(y-x))\cos(\omega t - \frac{k}{2}(x+y))}$. Il s'agit d'un phénomène d'interférences car l'amplitude d'une onde qui se propage (ici dans la direction $\vec{u}_x + \vec{u}_y$) est modulé en fonction de la position du point $M(x,y)$) .
6. Pour obtenir aucun son, on cherche une condition d'interférence destructive entre les deux ondes, soit d'annuler l'amplitude de l'onde précédente. Ainsi $\frac{k}{2}(y-x) = \frac{\pi}{2} + p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. On en déduit : $\boxed{y = x + \frac{\lambda}{2} + p\lambda}$. Ces surfaces sont des plans obliques parallèles au mur (traits verts plein).
7. A cause de l'angle de 45°, la distance entre les plans est $\boxed{d = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}}$ (théorème de Pythagore).
8. $\lambda = \frac{c}{f}$ soit $\boxed{d = \frac{c}{\sqrt{2}f} = 54{,}6\,\text{cm}}$. Les plans « silencieux » sont espacés comme les sièges. . .Cela peut donc être problématique pour écouter de la musique dans une salle de concert. Il est nécessaire d'avoir une surface partiellement absorbante, et créer des réflexions plus complexes (surface non plane, à trous et reliefs) pour éviter ce désagrément.

Problème 4 Étude d'un microscope

A Préliminaires

A.1 L'image est réelle agrandie et renversée.

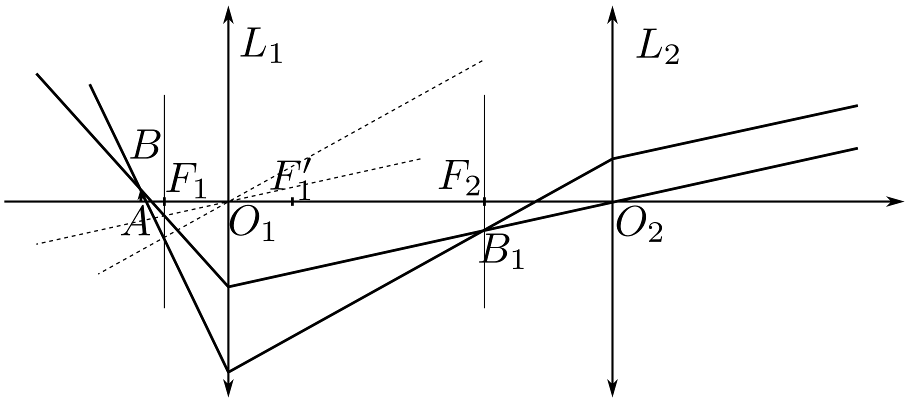


A.2 D'après le théorème de Thales, et la construction ci-dessus, on obtient le grandissement $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{FO}}{\overline{FA}} = \dfrac{f'}{\overline{FA}}$ et $\gamma = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = -\dfrac{\overline{F'A'}}{f'}$.
A.3 Méthodes à choisir parmi l'autocollimation (méthode rapide mais peu précise), la méthode de Bessel (méthode précise mais plus longue à mettre en oeuvre et nécessitant 4 mesures) et la méthode de Silbermann (méthode précise mais comlexité expérimentale pour garantir une symétrie entre l'objet et l'image, et un grandissement unitaire ; ne nécessite que deux mesures) ; cf TP.

B Positionnement de l'objet

B.1 L'œil n'accommode pas s'il voit l'image de l'objet par le microscope à l'infini. On a alors le schéma suivant : $A \xrightarrow{L_1} A' \equiv F_2 \xrightarrow{L_2} \infty$. En utilisant la formule de Newton, on a $\overline{F_1A}.\overline{F_1'F_2} = -f_1'^2$ soit $\boxed{\overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -2{,}5 \times 10^{-2}\,\text{mm}}$.
B.2 Le faisceau sortant de L_2 est parallèle donc issu d'un point B_1 qui est l'intersection entre le rayon émergent passant par O et le plan focal objet de L_2. Pour tracer les rayons incidents de L_1, on trace les rayons parallèles passant par O_1, on cherche ensuite l'intersection de ces rayons avec le plan focal objet de L_1. Les rayons incidents passent par ces points et se croisent au point B.

Les rayons lumineux sur la figure ci-dessous sont à orienter dans le sens de l'axe optique.



B.3 Lorsque l'œil voit l'image de l'objet AB par le microscope on a obtenu $\overline{F_1A_{PR}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$. Pour une vision au Ponctum Proximum on a le schéma suivant : $A_{PP} \xrightarrow{L_1} A_{1PP} \xrightarrow{L_2} A_{2PP}$ avec $\overline{F_2'A_{2PP}} = -d_m$. La formule de conjugaison de Newton appliquée à la lentille L_2 nous donne $\overline{F_2A_{1PP}} = \frac{f_2'^2}{d_m}$ et la formule de conjugaison appliqué à L_1 donne $\overline{F_1A_{PP}} = -\frac{f_1'^2}{\overline{F_1'A_{1PP}}} = -\frac{f_1'^2}{\Delta+\frac{f_2'^2}{d_m}}$. La latitude de mise au point s'écrit alors $l = \overline{A_{PR}A_{PP}} = \overline{F_1A_{PP}} - \overline{F_1A_{PR}}$ soit $\boxed{l = f_1'^2\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta+\frac{f_2'^2}{d_m}}\right) = 0{,}55\,\mu\mathrm{m}}$. Le réglage se fait donc par vis micrométrique.

C Expression du grossissement

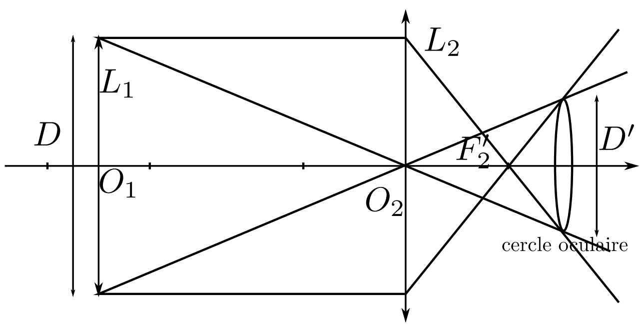
C.1 L'angle maximal sous lequel on voit AB est obtenu quand l'œil est le plus proche possible de l'objet. Soit $\tan\theta_0 = \frac{AB}{d_m}$. L'objet AB étant petit on peut écrire $\boxed{\theta_0 = \frac{AB}{d_m}}$.

C.2 θ est l'angle entre l'axe optique et les rayons émergents du système. D'après la figure précédente, on a : $\theta = \frac{A_1B_1}{f_2'}$. Le grandissement γ_1 de L_1 est donné par $\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{f_1'}{\overline{F_1A}}$. De plus on a montré à la question précédente que $\overline{F_1A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta}$ soit $\overline{A_1B_1} = -\frac{\overline{AB}\Delta}{f_1'}$ et $\boxed{\theta = \frac{AB\Delta}{f_1'f_2'}}$.

C.3 $\boxed{G = \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{d_m\Delta}{f_1'f_2'} = 6{,}7 \times 10^2}$

D Position de l'œil

D.1 Le cercle oculaire est la section la plus étroite du faisceau émergent du microscope. Tous les rayons qui entrent dans le microscope par l'objectif sortent donc par le cercle oculaire. On doit placer la pupille de l'œil dans ce cercle afin qu'un maximum de lumière entre l'œil. Les rayons lumineux sur la figure ci-dessous sont à orienter dans le sens de l'axe optique.



D.2 C est l'image de O par L_2. En utilisant la formule de Newton, on obtient $\overline{F_2'C} \cdot \overline{F_2O_1} = -f_2'^2$ et $\overline{F_2O_1} = \overline{F_2F_1'} + \overline{F_1'O_1} = -\Delta - f_1'$. On obtient alors $\boxed{\overline{F_2'C} = \frac{f_2'^2}{f_1'+\Delta} = 5{,}6\,\mathrm{mm}}$.

D.3 D' est l'image de D par L_2 donc $D' = \gamma_2 D$ où γ_2 est le grandissement de L_2 et d'après les relations de Newton $\gamma_2 = \frac{\overline{CF_2'}}{\overline{O_2F_2'}} = \frac{-f_2'}{f_1'+\Delta}$. Soit $\boxed{D' = \frac{f_2'}{f_1'+\Delta}D = 2{,}0\,\mathrm{mm}}$. Le diamètre du cercle oculaire est de l'ordre de grandeur du diamètre de la pupille. Une grande partie de la lumière incidente sera donc captée par l'œil.

E Pouvoir de résolution du microscope

E.1 Pour qu'un objet soit distingué, il faut que l'image de l'objet par le microscope soit vue sous un angle supérieur à ε. L'image est vue sous l'angle $\theta = \frac{AB\Delta}{f_1'f_2'}$. Donc $\theta > \epsilon$ conduit à $\boxed{AB > \frac{\epsilon f_1'f_2'}{\Delta} = 0{,}16\,\mu\mathrm{m}}$. (Attention à ne pas oublier de transformer les minutes d'arc en radians). La résolution de ce microscope risque d'être limité par le phénomène de diffraction et l'observation d'un objet de cette taille est peu probable.