Formule trigonométrique : $\cos p + \cos q = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Problème 1 : Mouvement hélicoïdal

Un point matériel M se déplace le long d'une hélice circulaire dans le référentiel R. Son mouvement est donné en coordonnées cylindriques par : $r = a$; $\theta(t) = \omega.t$; $z(t) = b.\theta(t)$, où a, b et ω sont des constantes.

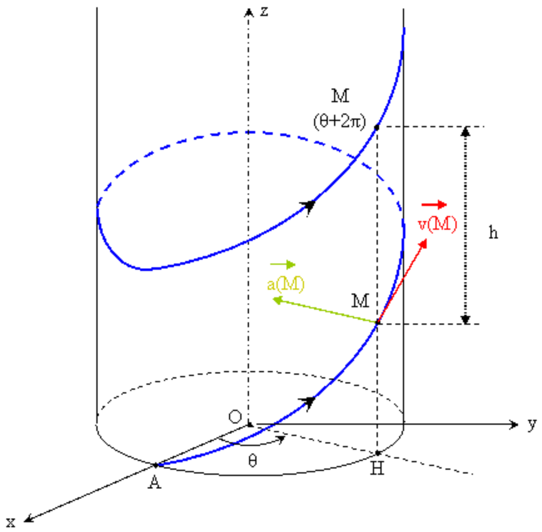
1) On note h le pas de l'hélice (cf schéma ci-contre). Exprimer h en fonction de b.

2) Donner l'expression du vecteur position du point M dans R en coordonnées polaires.

3) Etablir l'expression de la vitesse $\vec{v}(M)_R$ en coordonnées cylindriques.

4) Montrer que le mouvement de M est uniforme.

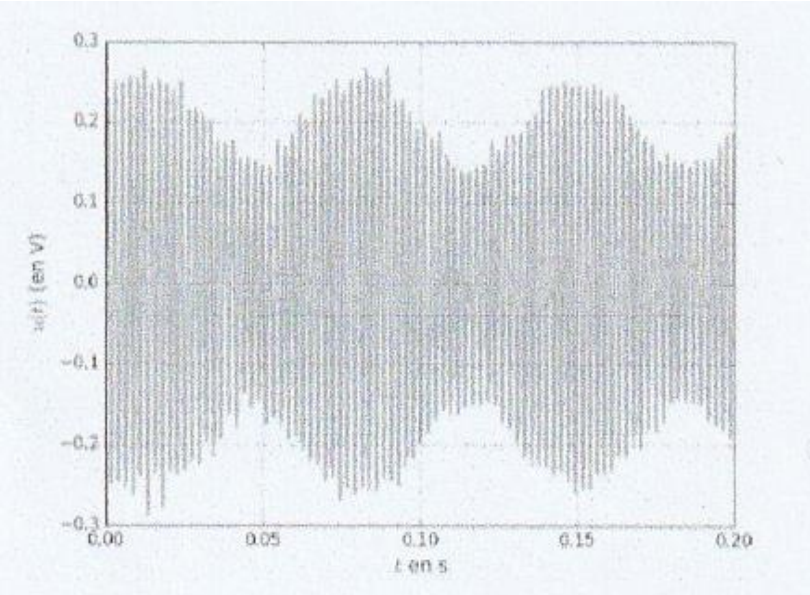
5) Etablir l'expression de l'accélération de M dans R en coordonnées cylindriques. Que peut-on dire de l'accélération ?



Problème 2 : Accorder sa guitare

Quand on accorde une guitare, une méthode consiste à comparer, à l'oreille, le son émis par une corde à une référence acoustique. Pour simuler expérimentalement cette situation, deux diapasons donnant le la3 (fréquence fondamentale de $f_1 = 440\ Hz$) ont été utilisés. En rajoutant une masselotte sur une branche d'un des deux diapasons, la fréquence f_2 de ce diapason est changée significativement. L'importance de l'effet dépend de la position de la masselotte sur la branche. On suppose que les fréquences f_1 et f_2 sont voisines ($\Delta f = f_2 - f_1 \ll f_1$).

La figure ci-contre montre un enregistrement du son résultant de la superposition des ondes produites par les deux diapasons excités, l'un des deux ayant été décalé en fréquence à l'aide d'une masselotte.



1) Quel phénomène observe-t-on ? Décrire précisément la sensation auditive associée.

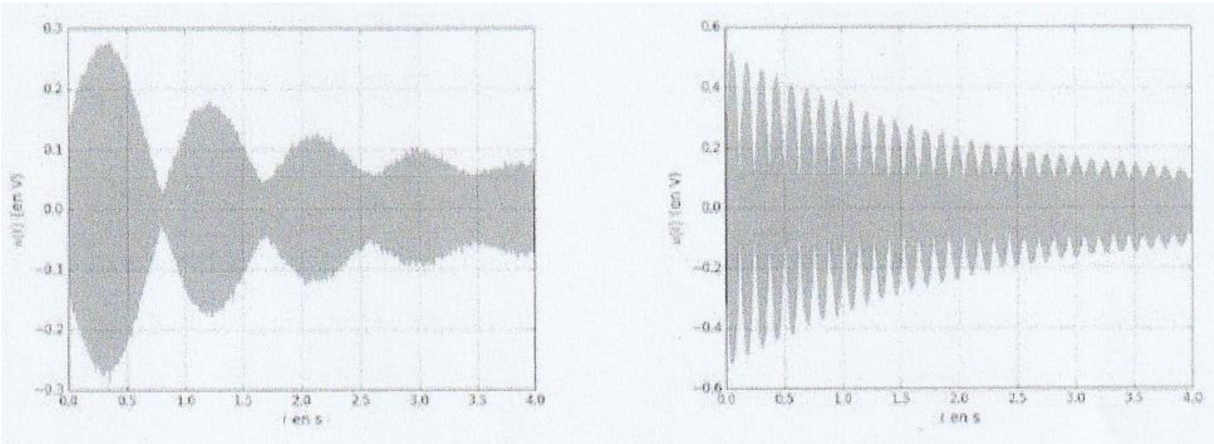
2) On suppose qu'en un point M, les ondes sonores émises par les deux diapasons sont du type : $u_1(M,t) = a.\cos(2.\pi.f_1.t)$ et $u_2(M,t) = a.\cos(2.\pi.f_2.t + \varphi)$ où φ est la différence de phase entre les deux ondes au point M. Montrer que la vibration résultante en M peut s'écrire sous la forme :

$$u(M,t) = 2.a.\cos\left(\omega.t + \frac{\varphi}{2}\right).\cos\left(\Omega.t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

où ω et Ω sont des pulsations. On définit $\omega \gg \Omega$, exprimer ω et Ω en fonction de f_1 et f_2.
3) On appelle période de battement, notée T_{batt} la période associée à la variation temporelle de l'amplitude du signal. Montrer que :

$$T_{batt} = \frac{1}{f_2 - f_1}$$

4) Mesurer l'écart Δf entre les fréquences des ondes émises par les deux diapasons à partir de la figure ci-dessus.
5) Dans les deux enregistrements ci-dessous, seule la position de la masselotte change. Dans quelle situation (gauche ou droite), les diapasons vibrent avec des fréquences les plus proches (une justification est attendue).



6) Comment expliquer dans ces deux situations que le signal s'atténue ?

Problème 3 : Etude d'une microbalance à cristal de quartz

Le quartz, de formule brute SiO_2 est un matériau dur, fragile et transparent, de masse volumique $\rho_q = 2{,}65.10^3\ kg.m^{-3}$. C'est un matériau piézoélectrique. Si on considère un morceau taillé de cristal de quartz et que l'on impose une tension électrique à ses bornes, le matériau réagit en subissant une contrainte mécanique. Inversement, si l'on soumet le quartz à une contrainte mécanique, une tension électrique apparait entre ses bornes.

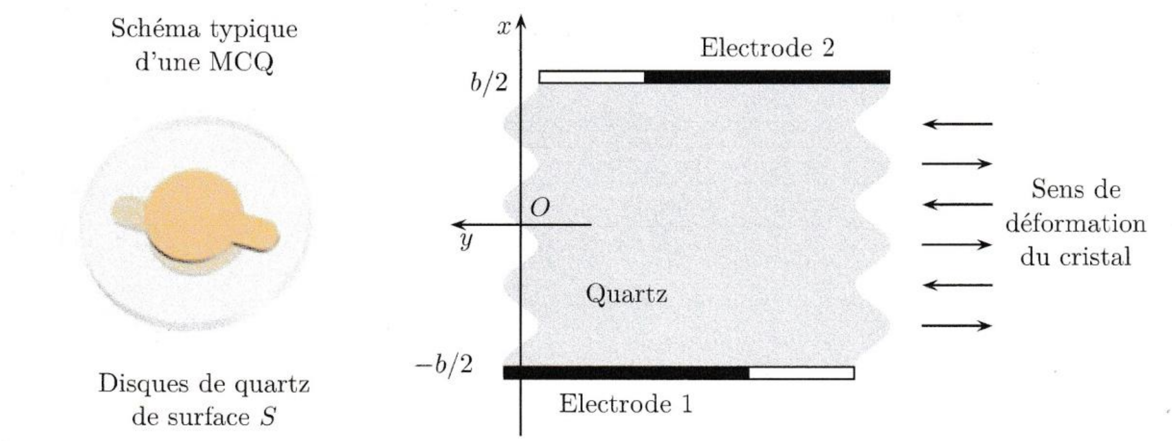


Schéma d'une microbalance à quartz et modélisation des modes de résonance au sein du cristal.

La structure cristalline du quartz lui confère de très bonnes propriétés de résonance. Si l'on applique une tension électrique alternative au quartz à une fréquence proche de sa fréquence propre f_0 on provoque l'apparition d'ondes progressives de cisaillement dans le cristal, analogues à des ondes sismiques, de célérité $c_q = 3340\ m.s^{-1}$ dont l'amplitude peut devenir très importante et qui déforment le cristal.

On a représenté sur la figure précédente un exemple de microbalance à cristal de quartz (MBQ) et le type de résonance observée lorsqu'une tension sinusoïdale de la forme $U(t) = U_m.\cos\left(\frac{2.\pi}{T}t\right)$ est appliquée au cristal. Il s'agit du même type d'ondes que celles observées sur une corde vibrante.
On considère une corde tendue horizontalement d'axe (Ox). Deux ondes transverses s'y propagent en sens opposé l'une de l'autre, les élongations transversales de ces ondes sont modélisées par les équations

$$y_+(x,t) = Y_m.\cos\left(2.\pi.\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right) \quad \text{et} \quad y_-(x,t) = Y_m.\cos\left(2.\pi.\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right)$$

1) Quelle relation existe-t-il, pour une onde progressive sinusoïdale entre T, λ et c_q ?
2) Dans quel sens se propage l'onde $y_+(x,t)$?
3) Sachant qu'en tout point de la corde et à tout instant les déformations dues aux ondes s'additionnent, on admet que l'onde y_r résultant de la superposition de y_- et y_+ s'écrit :

$$y_r(x,t) = y_-(x,t) + y_+(x,t) = Y_0.\cos\left(2.\pi.\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{\varphi}{2}\right).\cos\left(2.\pi.\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Déterminer l'expression de Y_0.
Dans le cas du cristal de quartz, d'épaisseur b, on montre que la déformation transverse prend la forme de l'équation précédente et s'écrit :

$$y_r(x,t) = Y_0(x).\cos\left(2.\pi.\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)$$

où $Y_0(x) = Y_0.\cos\left(2.\pi.\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)$ représente l'amplitude de la déformation en un point d'abscisse x.
La symétrie de l'excitation du système impose que la déformation est nulle à tout instant en $x = 0$ et que son amplitude $Y_0(x)$ est maximale en $x = \pm\frac{b}{2}$.
4) Déterminer la valeur de φ.
5) Montrer que les conditions limites en $x = \pm\frac{b}{2}$ imposent une quantification des valeurs de la longueur d'onde donnant lieu à un phénomène de résonance, celles-ci ne pouvant prendre que les valeurs :

$$\lambda_p = \frac{2.b}{2.p+1}$$

avec $p \in N$.
6) On note f_q la fréquence de résonance fondamentale correspondant à $p = 0$. Calculer l'épaisseur b du cristal donnant lieu à une fréquence fondamentale de 5,00 MHz.

On considère dans la suite du problème que le cristal de quartz est taillé de manière à posséder une fréquence fondamentale de 5,00 MHz.On dépose à présent un film homogène de masse M_f de manière uniforme à la surface S du résonateur à quartz étudié ci-dessus. Dans le cas où M_f est négligeable devant M_q, la masse du cristal de quartz résonant, Günter Sauerbrey montra en 1959 que la fréquence fondamentale du quartz était déplacée d'une quantité δf_q vérifiant la relation :

$$\frac{\delta f_q}{f_q} = -\frac{M_f}{M_q}$$

On introduit les masses par unité de surface $m_f = \frac{M_f}{S}$ et $m_q = \frac{M_q}{S}$
7) Exprimer m_q en fonction de $\rho_q$et b.
8) En déduire que :

$$\frac{\delta f_q}{f_q} = -\frac{2.m_f.f_q}{\rho_q.c_q}$$

9) Calculer la valeur de m_f donnant lieu à un décalage en fréquence de 1,00 Hz. On exprimera le résultat en $ng.cm^{-2}$.

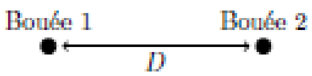
En considérant que la masse volumique du matériau déposé est d'environ $3.10^3\ kg.m^{-3}$, estimer l'ordre de grandeur de l'épaisseur du dépôt. Commenter.

10) Outre l'extrême sensibilité de cette méthode à la masse déposée, quels avantages présentent l'utilisation d'une microbalance à quartz ?

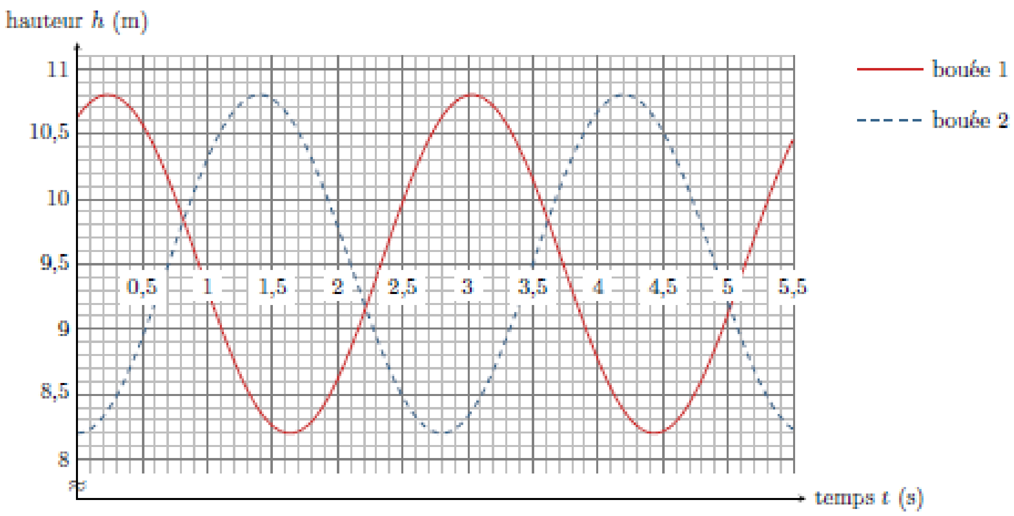
11) Quels inconvénients doit-on cependant prendre en compte dans le cadre d'un dépôt multicouches ?

Problème 4: Propagation de la houle, réflexion et interférence

La houle est constituée de vagues formées par le vent qui peuvent se propager sur de grandes distances et donc être observées dans des régions dépourvues de vent. On assimilera la houle à une onde mécanique progressive sinusoïdale. La hauteur de la houle est, par définition, égale à l'amplitude crête-à-crête de hauteur d'eau mesurée par rapport au niveau de la mer calme.



Deux bouées distantes de $D = 50\ m$ sont alignées dans le sens de propagation de la houle (voir schéma ci-dessus), la houle se propageant de la bouée 1 vers la bouée 2. Chacune est munie d'un accéléromètre qui enregistre leur déplacement vertical en fonction du temps. Les données recueillies sont tracées sur la figure ci-dessous représentant la hauteur d'eau (en mètres) en fonction du temps (en secondes).



A. Etude des signaux enregistrés par les bouées

1) Que vaut la hauteur H de la houle ? Que vaut sa période T ? Sa fréquence f ? Sa pulsation ω ?

2) Proposer une écriture mathématique littérale pour les hauteurs $h_1(t)$ et $h_2(t)$ des bouées 1 et 2 faisant notamment intervenir les paramètres définis à la question précédente et deux phases initiales φ_1 et φ_2.

3) Vérifier que le chronogramme est en accord avec la valeur $\varphi_1 = -\pi/6$.

4) Que vaut le plus petit retard apparent Δt_{app} de la houle entre les bouées, lu sur le graphique ? En déduire le déphasage apparent entre les bouées.

5) Le vrai retard de la houle entre les deux bouées est en fait $\Delta t = 3T + \Delta t_{app}$. En déduire le vrai déphasage.

6) En déduire la phase initiale φ_2. Vérifier que votre calcul est cohérent avec le chronogramme.

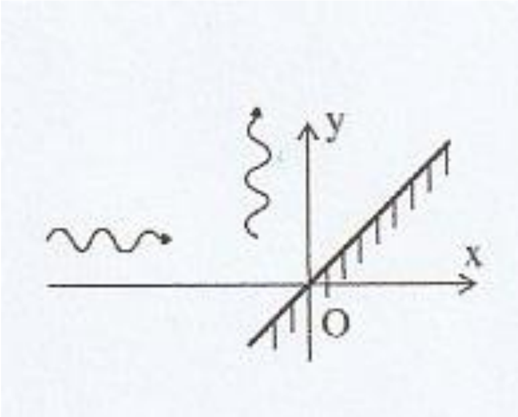
B. Caractéristiques de la houle

7) En déduire la célérité de la houle, d'abord à exprimer en fonction de $T, \Delta t_{app}$ et D, puis à calculer numériquement.

8) Calculer la longueur d'onde de la houle, d'abord à exprimer littéralement puis à calculer numériquement.

9) Quand la hauteur de la houle augmente, on observe que la période des oscillations augmente ainsi que la distance L entre deux vagues successives. Par exemple, en haute mer pour $h = 10\ m$, on mesure $T' = 5{,}0\ s$ et $L = 80\ m$. Quelle est la célérité c' d'une telle houle ?

C. Réflexion de la houle sur une jetée



On s'intéresse à la réflexion de la houle sur une jetée. Pour cela on assimile la houle à une onde progressive sinusoïdale, de pulsation ω, d'amplitude A, se propageant à la célérité c dans la direction du vecteur $\vec{u}_x$. On note $h_i(x,t)$ l'onde incidente.

L'onde se propage en direction d'une jetée assimilée à un mur oblique qui est orienté selon la première bissectrice du plan (à 45° de chaque axe, cf schéma ci-contre), et qui passe par l'origine O du plan Oxy. Cette jetée induit une onde réfléchie sinusoïdale et de même pulsation, qui se propage selon la direction $\vec{u}_y$. On la notera $h_r(y,t)$.

La réflexion étant supposée parfaite (sans absorption), l'amplitude de l'onde réfléchie est égale à celle de l'onde incidente.

10) Donner la forme explicite de l'onde incidente $h_i(x,t)$. On choisira une phase nulle à l'origine $(x,t) = (0,0)$, et on introduira la norme du vecteur d'onde k en fonction des données de l'énoncé.

11) Dessiner sur votre copie les plans d'onde qui correspondent à une phase nulle égale à 0 $\mathrm{mod}(2.\pi)$ à l'instant initial $t = 0$. Indiquer la distance qui les sépare en fonction de ω et c.

12) On admet que sur la jetée, l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente. Donner la forme explicite de l'onde réfléchie $h_r(y,t)$.

13) Dessiner sur la figure de la question 2 les plans d'onde de l'onde réfléchie qui correspondent à une phase égale à 0 $\mathrm{mod}(2.\pi)$ à l'instant initial $t = 0$.

14) On considère que les ondes incidentes et réfléchies sont suffisamment étendues pour qu'il existe une région proche de la jetée où elles se superposent. Donner la forme explicite de l'onde résultante $h(x,y,t)$ en la mettant sous la forme d'un produit de deux cosinus. De quel type de phénomène physique s'agit-il ?

15) Montrer qu'il existe des surfaces de l'espace où la houle résultante est nulle qui vérifient l'équation : $y = x + \frac{\lambda}{2} + n.\lambda$ où $n \in \mathbb{Z}$. Indiquer la forme de ces régions et les représenter sur le schéma.

16) Calculer la distance d entre deux de ces surfaces consécutives, qu'on exprimera en fonction de la longueur d'onde λ de l'onde incidente.

D. Interférences

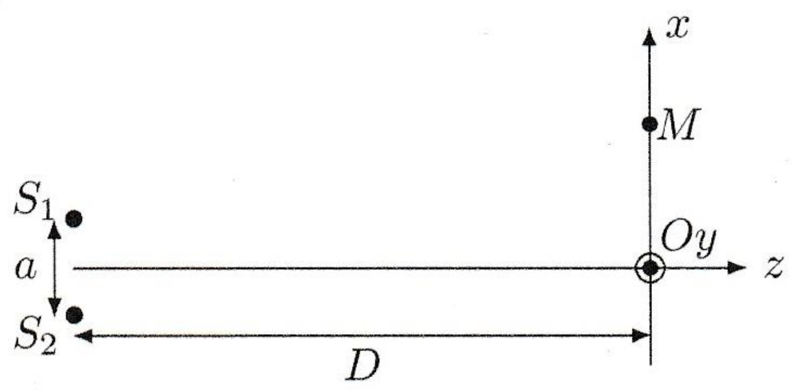
Dans certaines situations (influence du relief, présence d'îles…), en présence de houle, il est possible d'observer des interférences à la surface des océans. Pour modéliser ce phénomène, on considère deux ondes de même amplitude A, émises en phase en S_1 et S_2 à la fréquence $f = 0{,}10\ Hz$. Les ondes émises par les sources S_1 et S_2 sont identiques :

$$h_1(S_1, t) = h_2(S_2, t) = A.\cos(\omega.t)$$

Au point M, ces deux ondes s'écrivent :

$$h_1(M, t) = A_1.\cos\big(\omega.t - \varphi_1(M)\big)$$
$$h_2(M, t) = A_2.\cos\big(\omega.t - \varphi_2(M)\big)$$

On note c la célérité de la houle. Dans cet exercice, nous supposerons que $c = 10\ m.s^{-1}$.



17) Exprimer puis calculer la longueur d'onde λ des ondes émises par les sources.
18) Expliquer pourquoi $A_1 \neq A$ et $A_2 \neq A$.
19) Que représentent les termes $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$? Les exprimer notamment en fonction des distances S_1M et S_2M.
20) Exprimer le déphasage $\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M)$ en M entre les deux ondes issues de S_1 et S_2 en fonction de la différence de marche $\delta(M) = S_2M - S_1M$ et de λ.
21) Utiliser la représentation de Fresnel pour déterminer l'amplitude $A_{rés}$ de l'onde résultant de la superposition des deux ondes en M en fonction notamment de δ.
22) A quelle condition portant sur δ les interférences sont-elles destructives ?
23) Dans l'hypothèse où $x \ll D$ et $a \ll D$, montrer que $\delta(M) = \frac{a.x}{D}$
24) En déduire les positions sur l'axe Ox pour lesquelles les interférences sont destructives.