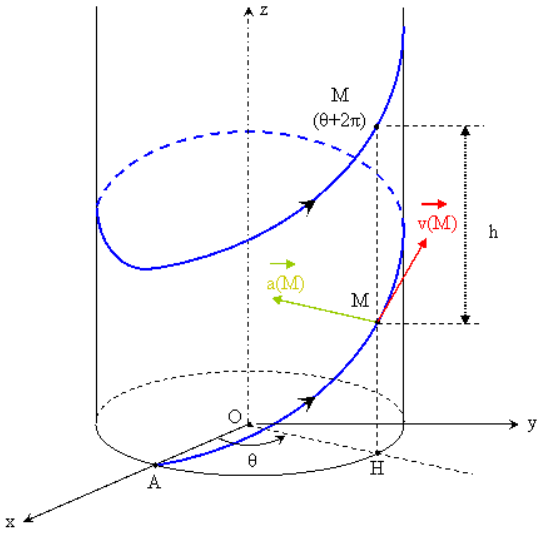
CLASSES DE PCSI 1 et 3 – Corrigé du D.L N° 3 DE PHYSIQUE

Problème 1 : Mouvement hélicoïdal

1) Par définition, le pas de l'hélice est donné par :

$$h = b.(\theta(t) + 2.\pi) - b.\theta(t) = 2.\pi.b$$

On constate que le pas de l'hélice est constant.



2) En coordonnées cylindriques, la position du point M est donnée par :

$$\overrightarrow{OM} = r.\vec{u}_r + z.\vec{u}_z$$

En explicitant :

$$\overrightarrow{OM} = a.\vec{u}_r + b.\theta(t).\vec{u}_z$$

3) En coordonnées cylindriques, la vitesse de M dans le référentiel R est donnée par :

$$\vec{v}(M)_R = \dot{r}.\vec{u}_r + r.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta + \dot{z}.\vec{u}_z$$

En explicitant avec $r = a = \text{cte}$ et $\dot{\theta} = \omega$:

$$\vec{v}(M)_R = a.\omega.\vec{u}_\theta + b.\omega.\vec{u}_z$$

4) Afin de montrer que le mouvement de M est uniforme dans R, déterminons la norme du vecteur vitesse :

$$v = \|\vec{v}(M)_R\| = \sqrt{(a.\omega)^2 + (b.\omega)^2} = \omega.\sqrt{a^2 + b^2}$$

On vérifie que $v = \text{cte}$ donc le mouvement de M dans R est uniforme.

5) En coordonnées cylindriques, l'accélération de M dans le référentiel R est donnée par :

$$\vec{a}(M)_R = \left(\ddot{r} - r.\dot{\theta}^2\right).\vec{u}_r + \left(2.\dot{r}.\dot{\theta} + r.\ddot{\theta}\right).\vec{u}_\theta + \ddot{z}.\vec{u}_z$$

Avec $r = a = \text{cte}$ et $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$, en explicitant, on établit que :

$$\vec{a}(M)_R = -a.\omega^2.\vec{u}_r$$

On constate que l'accélération est radiale, identique à celle d'une trajectoire circulaire et uniforme de rayon $r = a$.

Problème 2 : Accorder sa guitare

1) On observe un phénomène de battement. L'observateur perçoit un son modulé en amplitude au cours du temps.

2) En M à l'instant t la vibration résultante est :

$$u(M,t) = u_1(M,t) + u_2(M,t) = a.\cos(2.\pi.f_1.t) + a.\cos(2.\pi.f_2.t + \varphi)$$

A partir de la formule trigonométrique donnée, posons :

$$p = 2.\pi.f_2.t + \varphi \quad \text{et} \quad q = 2.\pi.f_1.t$$

On établit que :

$$u(M,t) = 2.a.\cos\left(2.\pi.\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right).t + \frac{\varphi}{2}\right).\cos\left(2.\pi.\left(\frac{f_2-f_1}{2}\right).t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Avec $\omega \gg \Omega$, on peut identifier ω et Ω :

$$\omega = 2.\pi.\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right) \quad \text{et} \quad \Omega = 2.\pi.\left(\frac{f_2-f_1}{2}\right)$$

3) Posons $\Omega = 2.\pi/T$:

$$T = \frac{2}{f_2 - f_1}$$

En notant que $T = 2.T_{batt}$ on vérifie que :

$$T_{batt} = \frac{1}{f_2 - f_1}$$

4) Mesure sur deux périodes de battement : $2.T_{batt} = 0{,}14\ s$. On en déduit que $T_{batt} = 69\ ms$ et $\Delta f = 15\ Hz$.
5) Plus les fréquences sont proches, plus la période de battement est grande, on peut donc dire que les diapasons vibrent avec les fréquences les plus proches dans la situation de gauche.
6) Dans cette étude, nous avons négligé les phénomènes d'amortissement (dû aux frottements de l'air, absorption dans le métal…). Si on tient compte des phénomènes d'amortissement, l'amplitude des ondes diminue au cours du temps.

Problème 3 : Etude d'une microbalance à cristal de quartz

1) Pour une onde progressive sinusoïdale : $\lambda = c_q.T$.
2) L'onde $y_+(x,t)$ se propage dans le sens des x croissants.
3) L'expression de $y_r(x,t) = Y_0.\cos\left(2.\pi.\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{\varphi}{2}\right).\cos\left(2.\pi.\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)$ peut s'établir à l'aide des fonctions trigonométriques : $\cos p + \cos q = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$. Par identification, on établit que $Y_0 = 2.Y_m$.
4) $Y_0(x) = Y_0.\cos\left(2.\pi.\left(\frac{x}{\lambda}\right) + \frac{\varphi}{2}\right)$ est nulle pour $x = 0$: $Y_0(0) = Y_0.\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$ donc $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}\ mod\ (\pi)$ et :

$$\varphi = \pi\ \ mod(2\pi)$$

5) Posons $\varphi = -\pi$ dans ce cas : $Y_0(x) = Y_0.\cos\left(2.\pi.\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = Y_0.\sin\left(2.\pi.\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right)$. Pour $x = \pm\frac{b}{2}$ l'amplitude de $Y_0(x)$ est maximale donc : $\left|Y_0\left(\pm\frac{b}{2}\right)\right| = Y_0$ et $\left|\sin\left(2.\pi.\left(\frac{\pm b}{2.\lambda}\right)\right)\right| = 1$. Soit :

$$\left|\sin\left(2.\pi.\left(\frac{b}{2.\lambda}\right)\right)\right| = 1$$

$$2.\pi.\left(\frac{b}{2.\lambda_p}\right) = \frac{\pi}{2} + p.\pi$$

Le premier terme de l'égalité est positif donc $p \in N$. On vérifie que :

$$\lambda_p = \frac{2.b}{2.p+1} \quad \text{avec} \quad p \in N$$

6) Pour $p = 0$, $f_q = \frac{c_q}{\lambda} = \frac{c_q}{2.b}$ A.N. : $b = \frac{c_q}{2.f} = 334\ \mu m$
7) Avec $M_q = \rho_q.S.b$ et $m_q = \frac{M_q}{S}$: $m_q = \rho_q.b$

8) Avec $\frac{\delta f_q}{f_q} = -\frac{M_f}{M_q} = \frac{m_f}{m_q} = -\frac{m_f}{\rho_q.b}$ et $b = \frac{c_q}{2.f_q}$ on établit la relation cherchée :

$$\frac{\delta f_q}{f_q} = -\frac{2.m_f.f_q}{\rho_q.c_q}$$

9) Ainsi : $m_f = -\left(\frac{\delta f_q}{{f_q}^2}\right).\frac{\rho_q.c_q}{2}$ A.N : Posons $\delta f_q = -1{,}00\ Hz$ car $m_f > 0$:

$$m_f = 177.10^{-9}\ kg.m^{-2} = 17{,}7\ ng.cm^{-2}$$

Soit e l'épaisseur du dépôt : $m_f = \rho_f.e$. Ainsi : $e = 5{,}9.10^{-11}\ m$. En ordre de grandeur, l'épaisseur du dépôt est de $0{,}1\ nm$ c.àd. de l'ordre des dimensions atomiques.
10) La MBQ est indépendante du champ de pesanteur.
11) Dans cette étude, nous avons négligé les interactions moléculaires. Avec un dépôt multicouche, il faudrait s'assurer que les différentes couches soient sans interactions et travailler sous vide pour éviter que des atomes extérieurs (comme le dioxygène de l'air) ne viennent se déposer sur les couches de dimensions atomiques.

Problème 4: Propagation de la houle, réflexion et interférence

A. Etude des signaux enregistrés par les bouées

1) Par définition, la hauteur de la houle est égale à l'amplitude crête-à-crête de la hauteur d'eau donc :

$$H = h_{max} - h_{min} = 10{,}8 - 8{,}2 = 2{,}6\ m$$

Mesure de la période T sur une période : $T = 3{,}75 - 0{,}95 = 2{,}8\ s$. On en déduit les valeurs de la fréquence et de la pulsation : $f = 0{,}36\ Hz$ et $\omega = 2{,}2\ rad.s^{-1}$.
2) On assimile la houle à une onde mécanique sinusoïdale. On peut donc poser :

$$h_1(t) = h_0 + \frac{H}{2}\cos(\omega.t + \varphi_1)$$
$$h_2(t) = h_0 + \frac{H}{2}\cos(\omega.t + \varphi_2)$$

avec $h_0 = 9{,}5\ m$ hauteur moyenne d'eau.

3) Déterminons la phase à l'origine de $h_1(t)$:

$$h_1(0) = h_0 + \frac{H}{2}\cos(\varphi_1)$$

On en déduit que :

$$\cos(\varphi_1) = \frac{h_1(0) - h_0}{\frac{H}{2}} = \frac{2.(h_1(0) - h_0)}{H}$$

Mesures : $h_1(0) = 10{,}6\ m$, $h_0 = 9{,}5\ m$ et $H = 2{,}6\ m$ donc $\cos(\varphi_1) = 0{,}85$ et $\varphi_1 = \pm\ 0{,}56$ rad. En notant que $h_1(t)$ est croissante à $t = 0$:

$$\left(\frac{dh_1(t)}{dt}\right) = \left(\frac{H}{2}\right).(-\omega).\sin(\omega.t + \varphi_1)$$

$$\left(\frac{dh_1(t)}{dt}\right)_{t=0} = -\left(\frac{\omega.H}{2}\right).\sin\varphi_1 > 0$$

On en déduit que $\sin\varphi_1 < 0$ et que $\varphi_1 = -\ 0{,}56$ rad valeur proche de $-\frac{\pi}{6}$

4) Le plus petit retard apparent entre les deux bouées est : $\Delta t_{app} = (1{,}4 - 0{,}25) = 1{,}2\ s$. Le déphasage apparent entre les deux bouées est :

$$\Delta\varphi_{app} = \omega.\Delta t_{app} = 2{,}6 \text{ rad.} = \frac{5.\pi}{6}$$

Rq. : graphiquement, on constate que $\varphi_2 = -\pi \mod(2.\pi)$. Ceci est en accord avec le fait que :

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \Delta\varphi_{app} = -\frac{\pi}{6} - \frac{5.\pi}{6} = -\pi$$

5) Déphasage vrai :

$$\Delta\varphi_{vrai} = \omega.\Delta t = \omega.\left(3.T + \Delta t_{app}\right) = 6.\pi + \frac{5.\pi}{6} = 21 \text{ rad.}$$

6) On en déduit que :

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \Delta\varphi_{vrai} = -22 \text{ rad.}$$

Ceci est cohérent avec le chronogramme (cf rq ci-dessus).

B. Caractéristiques de la houle

7) La célérité de la houle est définie par :

$$c = \frac{D}{\Delta t} = \frac{D}{3.T + \Delta t_{app}}$$

A.N. : $c = 5{,}2\ m.s^{-1}$

8) La longueur d'onde est donnée par : $\lambda = c.T$. A.N. : $\lambda = 15\ m$

9) De la même manière, en posant $\lambda' = L$: $L = c'.T'$ donc :

$$c' = \frac{L}{T'}$$

A.N. : $c' = 16\ m.s^{-1}$.

C. Réflexion de la houle sur une jetée

10) On assimile la houle à une onde progressive sinusoïdale se propageant dans la direction du vecteur $\vec{u}_x$. On peut donc dire que l'onde incidente $h_i(x,t)$ est du type :

$$h_i(x,t) = A.\cos(\omega.t - k.x + \varphi)$$

Sachant qu'on choisit une phase nulle en $(x,t) = (0,0)$:

$$h_i(x,t) = A.\cos(\omega.t - k.x)$$

avec $k = \omega/c$.

11) Les plans d'onde qui correspondent à une phase nulle égale à $0 \mod(2.\pi)$ à l'instant initial $t = 0$ sont fixés par :

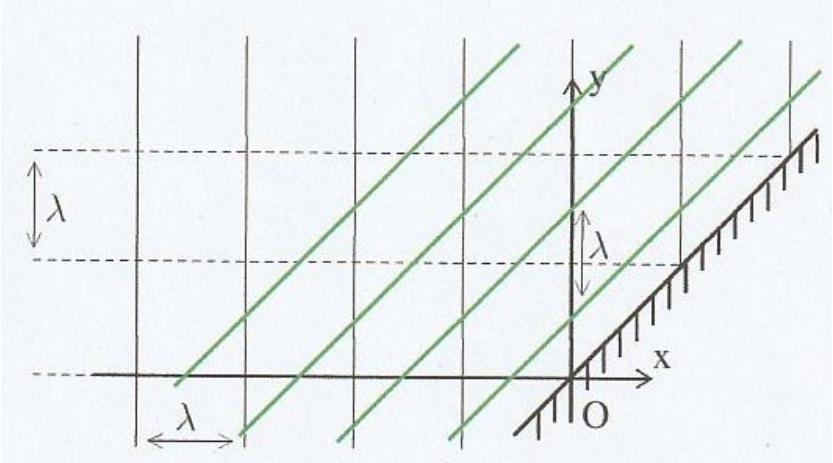
$$-k.x_n = 2.n.\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, on vérifie que $x_n \leq 0$.

En posant $k = 2.\pi/\lambda$ on établit l'équation des plans d'onde : $x_n = -n.\lambda$

Deux plans d'onde successifs sont séparés d'une longueur d'onde λ. Sachant que $\lambda = c.T$:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{2.\pi.c}{\omega}$$



12) Londe réfléchie sur la jetée est du type : $h_r(y,t) = A.\cos(\omega.t - k.y + \psi)$. Sachant que l'onde réfléchie est en phase avec l'onde incidente sur la jetée, on en déduit que :

$$h_r(y,t) = A.\cos(\omega.t - k.y)$$

13) De la même manière, on établit que les plans d'onde qui correspondent à une phase nulle égale à 0 mod$(2.\pi)$ à l'instant initial $t = 0$ sont fixés par :

$$-k.y_n = -2.n.\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, on vérifie que $y_n \geq 0$.

En posant $k = 2.\pi/\lambda$ on établit l'équation des plans d'onde : $y_n = n.\lambda$

De la même manière, deux plans d'onde successifs sont séparés d'une longueur d'onde λ :

$$\lambda = \frac{2.\pi.c}{\omega}$$

14) On note $h(x,y,t)$ l'onde résultante définie par :

$$h(x,y,t) = h_i(x,t) + h_r(y,t)$$

En explicitant :

$$h(x,y,t) = A.\cos(\omega.t - k.x) + A.\cos(\omega.t - k.y)$$

En utilisant la formule trigonométrique fournie :

$$h(x,y,t) = 2.A.\cos\left(\omega.t - k.\left(\frac{x+y}{2}\right)\right).\cos\left(k.\left(\frac{y-x}{2}\right)\right)$$

On observe une onde progressive, modulée en amplitude dans l'espace (O,x,y) par la fonction $\cos\left(k.\left(\frac{y-x}{2}\right)\right)$. Ceci est caractéristique d'un phénomène d'interférence.

15) A tout instant, la houle résultante est nulle pour :

$$\cos\left(k.\left(\frac{y-x}{2}\right)\right) = 0$$

C'est-à-dire pour :

$$k.\left(\frac{y-x}{2}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right).\pi$$

En posant $k = 2.\pi/\lambda$ on vérifie que la houle résultante est nulle pour :

$$y = x + \frac{\lambda}{2} + n.\lambda \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{Z}$$

-le premier plan sur lequel la houle résultante est nulle est celui pour lequel $n = 0$: $y_0 = x + \frac{\lambda}{2}$
-le deuxième plan est défini pour $n = 1$ par : $y_1 = x + \frac{\lambda}{2} + \lambda = x + \frac{3.\lambda}{2}$
… et ainsi de suite…
Les plans sur lesquels la houle résultante est nulle sont tous les plans distants de $n.\lambda$ du plan d'équation $y_0 = x + \frac{\lambda}{2}$
16) La distance d entre deux plans consécutifs est donnée par : $\cos(45) = d/\lambda$ soit :

$$d = \lambda/\sqrt{2}$$

D. Interférences

17) Avec $\lambda = c/f$ on établit que $\lambda = 1{,}0.10^2\ m$.
18) En supposant que la houle soit émise en S_1 et S_2 elle serait assimilable à une onde circulaire dont l'amplitude diminue au cours de sa propagation… (cf onde produite par un caillou jeté dans l'eau). A cette atténuation s'ajoute l'amortissement résultant des phénomènes dissipatifs dans le milieu de propagation. Compte tenu du fait que les deux ondes n'ont pas parcourues la même distance, elles n'ont pas la même amplitude en M.
19) Les grandeurs $\varphi_1(M)$ et $\varphi_2(M)$ sont les déphasages dû à la propagation des ondes entre S_1 (respectivement S_2) et le point M. Sachant que $h_1(M,t)$ et $h_2(M,t)$ sont des ondes sinusoïdales progressives, se propageant dans le sens de r croissant, on peut dire que :

$$h_1(M,t) = A_1.\cos(\omega.t - k.r_1) = A_1.\cos\big(\omega.t - k.(S_1M)\big)$$
$$h_2(M,t) = A_2.\cos(\omega.t - k.r_2) = A_2.\cos\big(\omega.t - k.(S_2M)\big)$$

Par identification :

$$\varphi_1(M) = k.(S_1M) \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(M) = k.(S_2M)$$

20) On en déduit que :

$$\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = k.(S_2M - S_1M)$$

En posant $\delta(M) = S_2M - S_1M$ et $k = 2.\pi/\lambda$:

$$\varphi(M) = \frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}$$

21) A partir des vecteurs de Fresnel, on établit que l'amplitude de la vibration résultante est :

$$A_{rés} = \sqrt{{A_1}^2 + {A_1}^2 + 2.A_1.A_2.\cos\left(\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}\right)}$$

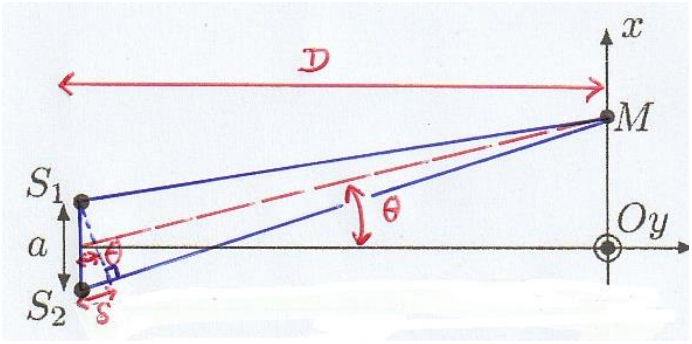
22) Les interférences sont destructives en M pour $\cos\left(\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda}\right) = -1$ ce qui implique que :

$$\frac{2.\pi.\delta(M)}{\lambda} = (2.n+1).\pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}$$

On établit que :

$$\delta(M) = \left(n + \frac{1}{2}\right).\lambda$$

23)



Avec : $\tan\theta = x/D$ et $\sin\theta = \delta(M)/a$, dans l'hypothèse des petits angles :

$$\frac{x}{D} = \frac{\delta(M)}{a}$$

On vérifie que :

$$\delta(M) = \frac{a.x}{D}$$

24) Sur l'axe Ox les interférences sont destructives pour :

$$\frac{a.x_n}{D} = \left(n + \frac{1}{2}\right).\lambda$$

Soit :

$$x_n = \left(n + \frac{1}{2}\right).\frac{\lambda.D}{a}$$