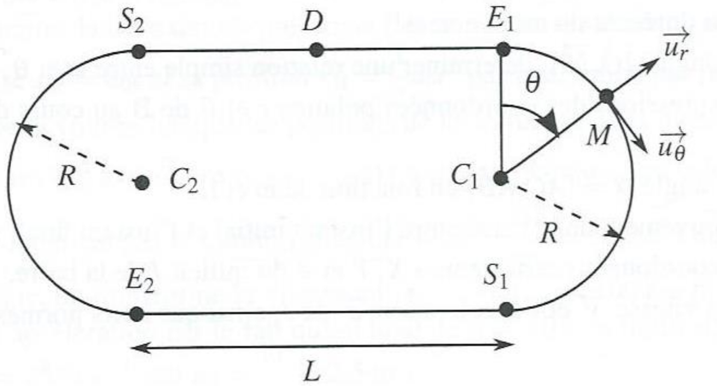
CLASSES DE PCSI 1 et 3 - D.S N° 3 DE PHYSIQUE

Durée de l'épreuve : 3h

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, **la clarté** et **la précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

Problème n°1 : Parcours sur un vélodrome

On s'intéresse à un cycliste, considéré comme un point M, qui s'entraine sur un vélodrome constitué de deux demi-cercles reliés par deux lignes droites (voir figure ci-dessous). Données : $L = 62{,}0\ m$ et $R = 20{,}0\ m$. Le cycliste part de D avec une vitesse nulle.



1) Il exerce un effort constant ce qui se traduit par une accélération constante a_1 jusqu'à l'entrée E_1 du premier virage. Calculer le temps t_{E1}de passage en E_1 ainsi que la vitesse v_{E1} en fonction de a_1 et L.
2) De E_1 à S_1 la trajectoire du cycliste est circulaire, de rayon R. Etablissez les expressions de la vitesse et de l'accélération de M en coordonnées polaires.
3) Dans le premier virage, le cycliste a une accélération orthoradiale constante (suivant $\vec{u}_\theta$) égale à a_1. Montrer que si on garde la même origine des temps qu'à la question 1), la vitesse et la distance parcourue par le cycliste en un point M quelconque entre E_1 à S_1 sont données par :

$$v(t) = a_1.t \qquad et \qquad d(t) = \frac{1}{2}a_1.t^2$$

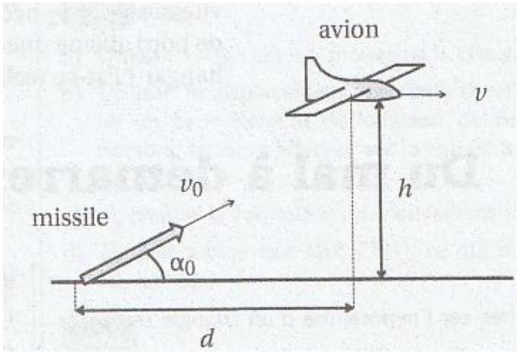
4) En explicitant la distance parcourue en S_1, déterminer le temps t_{S1} de passage en S_1 ainsi que la vitesse v_{S1} en fonction de a_1, de L et R.
5) De même, en considérant que la norme de l'accélération est constante tout au long du premier tour et égale à a_1, déterminer les temps t_{E2}, t_{S2} et t_D (après un tour), ainsi que les vitesses correspondantes.
6) La course s'effectue sur quatre tours (1,00 km) mais on ne s'intéresse donc qu'au premier tour effectué en $t_1 = 17{,}2\ s$ (record des JO 2024 par équipe remporté par les néerlandais). Déterminer la valeur de l'accélération a_1 ainsi que la vitesse atteinte en D. La vitesse mesurée sur piste est de $60{,}0\ \mathrm{km.h^{-1}}$. Que doit-on modifier dans le modèle pour se rapprocher de la réalité ?

Problème n°2 : Un peu de cinématique avec James Bond…

Au début du film d'espionnage Octopussy, James Bond, incarné par Roger Moore, s'échappe dans un petit avion dissimulé au sein d'un van. On s'intéresse à différentes parties du film concernant cet épisode.

1) Dans un premier temps, partant d'une vitesse nulle, l'avion atteint en $t_1 = 7{,}00\ s$ une vitesse $v_1 = 100$ noeuds (qu'on peut lire en « *knots* » sur l'anémomètre du tableau de bord) en roulant sur une piste rectiligne en direction de camions occupés par des soldats cubains et décolle juste avant la collision. On suppose qu'il accélère de manière uniforme. On rappelle qu'un nœud correspond à une vitesse de $1{,}85\ \mathrm{km.h^{-1}}$.
-a- Déterminer l'accélération nécessaire et la comparer à l'accélération de pesanteur $\mathrm{g} = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$.
-b- Quelle distance a-t-il alors parcouru ?

2) Stabilisé à une vitesse $v = 250$ nœuds en mouvement rectiligne uniforme à l'altitude h, l'avion est visé par un missile tiré avec un angle α_0 par rapport à l'horizontale avec une vitesse $\vec{v}_0$. Le missile est tiré alors que l'avion est à une distance d devant le lanceur comme indiqué sur le schéma ci-contre.



On suppose que la trajectoire du missile est **rectiligne et uniforme** (vecteur vitesse constant égal $\vec{v}_0$) avec $v_0 = \frac{3}{2}v$.

-a- Etablir les équations horaires satisfaites par l'avion et le missile.
-b- Montrer que α_0 vérifie l'équation :

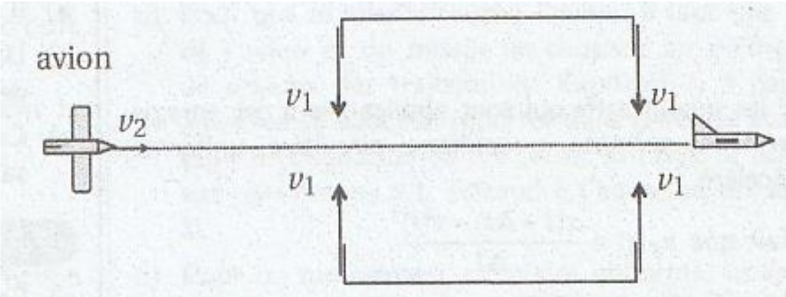
$$\cos\alpha_0 = \left(\frac{d}{h}\right)\sin\alpha_0 + \frac{v}{v_0}$$

-c- On pose $x = \sin\alpha_0$. Etablir l'équation du second ordre vérifiée par x.
-d- Déterminer l'angle α_0 d'inclinaison à donner au missile pour qu'il atteigne sa cible si l'avion ne dévie pas de sa trajectoire.
-e- Quelle est la durée avant l'impact ?
-f- Effectuer l'application numérique pour $d = 300\ m$ et $h = d/2 = 150\ m$.

En fait, dans le film Octopussy, le missile est équipé de capteurs infrarouges qui lui permettent de s'aligner en permanence sur la direction que prend l'avion. On retrouve par contre la situation précédente dans le film Goldeneye (avec Pierce Brosnan dans le rôle de James Bond) dans lequel l'avion qui effectue des aller-retours rectilignes au-dessus d'un lac est touché par un missile tiré exactement dans ces conditions.

3) Après son mouvement rectiligne, l'avion effectue un demi-tour circulaire de rayon R pour échapper à l'impact. On suppose qu'il garde sa vitesse initiale $v = 250$ nœuds constante durant cette manœuvre. Donner la valeur minimale de R afin que James Bond ne subisse pas une accélération de plus de $5.g$ qui entrainerait une perte de connaissance. Quelle est alors la durée de ce demi-tour ?

4) L'avion perd de l'altitude et arrive en rasant le sol en direction d'un hangar de forme rectangulaire muni de deux lourdes portes coulissantes en entrée et des mêmes en sortie. Dans le film, voyant l'avion arriver dans le hangar, les soldats ferment progressivement les portes en les poussant à vitesse constante v_1 comme indiqué sur le schéma ci-dessous (vue de dessus) :



L'avion passe alors de justesse entre les deux portes d'entrée, continue son trajet à l'intérieur du hangar tandis que les portes de sortie continuent à se refermer progressivement. Il effectue une rotation de 90 ° de manière à positionner ses ailes verticalement et non plus horizontalement : ainsi incliné, il peut franchir de justesse l'étroit passage entre les portes de sortie. Le missile qui le poursuit explose alors dans le hangar. On assimilera la trajectoire de l'avion à un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_2.

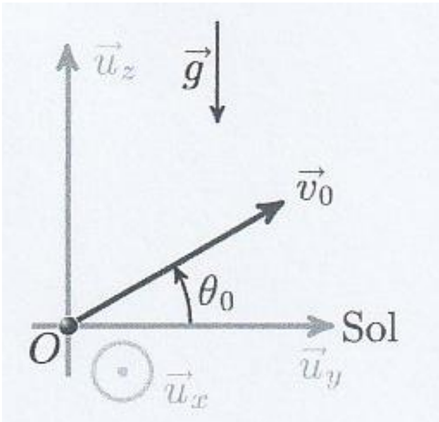
-a- Sachant que dans le film, les ailes de l'avion ont une longueur de $l_0 = 2{,}30\ m$, que les dimensions du cockpit sont une largeur de $l_1 = 0{,}700\ m$ et une hauteur h variant de $0{,}900\ m$ en tête de l'avion et $1{,}40\ m$ sur l'aileron de queue et que l'avion met un temps $t_2 = 4{,}00\ s$ à franchir la distance $l = 40{,}0\ m$ entre les deux portes, en déduire les vitesses v_1 et v_2 nécessaires à la réalisation de la cascade.

-b- Dans le film, le tableau de bord affiche une vitesse $v_2 = 150$ nœuds. Quelle serait la longueur l' du hangar ? Est-ce réaliste ?

Problème 3 : Tir de projectile sans et avec frottements

A. Tir d'un projectile sans frottements

Un projectile assimilé à un point matériel de masse m est lancé à partir du sol en O avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 \in (O, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et faisant un angle θ_0 avec l'horizontale dans le référentiel terrestre supposé galiléen.



1) Rappeler la définition d'un référentiel galiléen. Dans quelle mesure le référentiel terrestre peut-il être supposé galiléen ?

2) Etablir les équations horaires du mouvement. Montrer que le mouvement est plan.

3) Etablir l'équation de la trajectoire. Quelle est la forme de la trajectoire ? Est-elle symétrique ?

4) Déterminer les coordonnées du sommet S de la trajectoire. Définir la portée l du tir et établir son expression. Quel est l'angle θ_0 assurant un tir de portée maximale ?

B. Tir d'un projectile avec frottements

On considère maintenant que le projectile est soumis à une force de frottements proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{f} = -\alpha.\vec{v} \qquad \text{avec} \quad \alpha > 0$$

5) Quelle est la dimension du coefficient α ? Définir à partir de α un temps caractéristique τ. Le mouvement reste-t-il plan ? Justifier.

6) Etablir, en fonction de g, τ, v_0, θ_0 et t les nouvelles équations horaires du mouvement.

7) Dans la situation où $t \ll \tau$, simplifier les équations horaires de la trajectoire et donner l'allure du mouvement. On rappelle que pour $x \ll 1$: $e^x = 1 + x$ au premier ordre en x.

8) Dans la situation où $t \gg \tau$, simplifier les équations horaires du mouvement en faisant apparaitre une vitesse limite v_∞. Où tombe le projectile ?

9) Déduire des résultats précédents, l'allure de la trajectoire dans une situation où le temps de vol est grand devant τ, en séparant la trajectoire en trois phases.

10) Tracer l'allure de la trajectoire pour un temps de vol de l'ordre de τ.

Problème n°4 : Estimation de la distance Terre-Lune

La lune est le satellite naturel de la Terre. De tout temps, elle a été pour les humains un objet de mesure du temps, une source de lumière nocturne voire une divinité. Elle est aujourd'hui un objet de recherche scientifique et un symbole de la conquête spatiale. Ce sujet aborde la mesure de la distance Terre-Lune réalisée dans l'antiquité par Aristarque de Samos et la télémétrie moderne. Les applications numériques seront données avec 2 chiffres significatifs. Plusieurs données numériques et formules sont données en fin de sujet.

I. La mesure moderne de la distance Terre-Lune

La mesure actuelle de la distance Terre-Lune se fait à l'aide de la télémétrie laser. Depuis la surface de la Terre, on envoie une impulsion laser vers des miroirs déposés à la surface de la Lune par différentes missions, dont celui le plus utilisé, déposé par la mission Apollo 15 en 1971.

Pour produire le laser nécessaire à cette expérience on réalise une cavité optique constituée de deux miroirs en vis-à-vis séparés par de l'air dans lequel on place un amplificateur optique. La cavité optique est paramétrée sur la figure ci-contre.

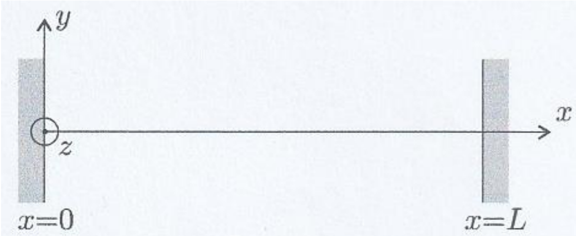


FIGURE – Cavité optique.

On considère que les miroirs sont constitués de métal idéal, c'est-à-dire qu'un champ électrique ne peut pas se propager à l'intérieur (le champ électrique résultant est nul dans le métal). Un champ électrique $E_i = E_0.\cos(\omega.t - k.x)$ est introduit dans la cavité optique. L'amplificateur ne sera pas pris en compte pour la propagation de l'onde dans la cavité remplie d'air qui sera supposé avoir les mêmes propriétés que le vide pour le champ électrique.

1) Quelles sont les caractéristiques du champ électrique E_i introduit dans la cavité optique ? On précisera le nom et l'unité des grandeurs E_0, ω et k.

2) En $x = L$, le champ électrique E_i subit une réflexion. On note E_r le champ électrique réfléchi. Donner la forme générale du champ E_r. En utilisant la condition aux limites en $x = L$, déterminer l'expression du champ électrique E_r.

3) Justifier que la forme du champ électrique ne permet pas d'utiliser la cavité pour obtenir n'importe quelle fréquence laser. Déterminer l'expression des fréquences possibles en fonction notamment de la longueur L de la cavité.

4) Le laser utilisé pour la télémétrie Terre-Lune est un laser YAG-Nd de longueur d'onde $\lambda = 1064$ nm auquel on a adjoint un doubleur de fréquence. Quelle est la longueur d'onde utilisée pour cette mesure et quel est le domaine électromagnétique correspondant ?

5) La durée moyenne de l'aller-retour pour un très grand nombre d'impulsions laser entre la Terre et la Lune est $\Delta t = 2{,}56$ s. Déterminer la distance Terre-Lune obtenue par la télémétrie laser.

II. La lune dans l'Antiquité

Dès l'antiquité les humains se sont intéressés à la Lune et à ses caractéristiques. La Lune réalisant une révolution autour de la Terre tout en étant éclairée par le Soleil, la partie visible de la Lune depuis la Terre change. La succession des phases de la Lune vue depuis la Terre s'appelle un cycle lunaire et a permis de définir la notion de mois. La durée d'un cycle lunaire est environ $\tau_{cl} = 30$ jours. L'écart entre la période de révolution τ_l de la Lune et le cycle lunaire provient du fait qu'en même temps que la Lune autour de la Terre, cette dernière tourne également autour du Soleil. Après une révolution de la Lune autour de la Terre, la phase de la Lune n'est pas la même. La Lune doit parcourir une plus grande distance pour finir le cycle lunaire.

6) Rappeler quelle est la période de révolution τ_t de la Terre autour du Soleil. En déduire la fraction φ de l'orbite que parcours la Terre durant un cycle lunaire.

7) En déduire la période de révolution de la Lune autour du centre de la Terre.

Au III$^{\text{ème}}$ siècle avant Jésus-Christ, Aristarque de Samos réalise des mesures astronomiques afin de déterminer les dimensions de la Lune ainsi que le rayon de son orbite autour de la Terre. A partir de ses observations il mesure que :

- la Lune met 1 heure à parcourir son propre diamètre depuis la Terre ;
- lors d'une éclipse totale de Lune, la Lune reste 2 heures dans l'ombre de la Terre ;
- l'angle sous lequel on voit la Lune depuis la Terre est de 2 ° (on sait aujourd'hui que c'est environ 4 fois moins).

8) A la même période, Erastosthène mesure qu'un arc de 7,2 ° de circonférence terrestre mesure environ 800 km. En déduire la valeur du diamètre terrestre.

9) En utilisant les mesures d'Aristarque de Samos, déterminer le rapport entre le diamètre lunaire et le diamètre terrestre. On pourra s'aider d'un schéma.

En déduire la valeur du diamètre lunaire évaluée par Aristarque. Calculer l'écart relatif de ce résultat avec le véritable diamètre de la Lune qui est d'environ 3 500 km. Commenter.

10) On conserve désormais la valeur du diamètre de la Lune valant 3 500 km. Déterminer la distance Terre-Lune à partir des mesures d'Aristarque de Samos. Comparer ce résultat avec celui obtenu par télémétrie laser. Commenter.

11) La masse volumique moyenne d'une roche est de l'ordre de quelques tonnes par mètre cube (la masse volumique du granit rose est $\rho = 3{,}0.10^3\ \mathrm{kg.m^3}$). En déduire une estimation de la masse de la Lune puis de l'intensité du champ de pesanteur lunaire. Comparer avec l'intensité du champ de pesanteur terrestre.

Données :

Formule trigonométrique : $\cos p + \cos q = 2.\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Constante gravitationnelle $G = 6{,}67.10^{-11}\ \mathrm{m^3.kg^{-1}.s^{-2}}$.

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}0.10^8\ \mathrm{m.s^{-1}}$

Si on assimile le champ de pesanteur au champ gravitationnel : $g = \frac{G.M}{R^2}$