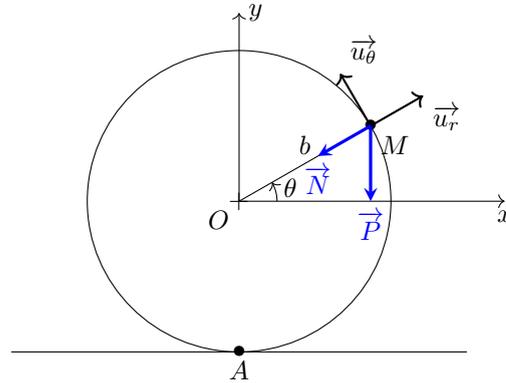


### Exercice 1 Looping sur la glace

#### A Première partie : mouvement dans le guide.

- A.1**  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$  et  $\vec{u}_\theta$  est orthogonal à  $\vec{u}_r$  dans le sens des  $\theta$  croissants.  
 $\vec{OM} = b\vec{u}_r$   
 $\vec{v} = b\dot{\theta}\vec{u}_\theta$   
 $\vec{a} = -b\dot{\theta}^2\vec{u}_r + b\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$

- A.2** Le patineur assimilé à un point matériel  $M$  est soumis à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$  et à la réaction du support  $\vec{N} = -N\vec{u}_r$ .



#### A.3 Étude du mouvement à l'intérieur du guide.

- A.3.1** On applique le principe fondamental de la dynamique (PFD) au patineur dans le référentiel terrestre supposé galiléen :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$ .

- A.3.2** En projetant cette équation suivant  $\vec{u}_\theta$ , on obtient  $mb\ddot{\theta} = -mg\cos\theta$ . En la multipliant par  $\dot{\theta}$ , on obtient  $b\dot{\theta}\ddot{\theta} = -g\dot{\theta}\cos\theta$ . En intégrant cette relation entre  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  (pour  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\dot{\theta} = \frac{v_0}{b}$ ) et  $\theta$  on obtient  $\left[\frac{1}{2}b\dot{\theta}^2\right]_{-\frac{\pi}{2}}^\theta = -g[\sin\theta]_{-\frac{\pi}{2}}^\theta$  soit  $\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{b^2} - \frac{2g}{b}(\sin\theta + 1)$

- A.3.3** La coordonnée  $y$  du point  $M$  est  $y = b\sin\theta$ , d'après la relation précédente, on obtient alors  $\|\vec{v}\|^2 = v_0^2 - 2g(y + b)$ .  
 On vérifie que lorsque  $y = -b$ ,  $\|\vec{v}\| = v_0$ .

- A.3.4** La projection du PFD suivant  $\vec{u}_r$  donne :  $-mb\dot{\theta}^2 = -N - mg\sin\theta$ . En remplaçant  $\dot{\theta}^2$  par son expression on obtient  $\|\vec{N}\| = m\left(\frac{v_0^2}{b} - 2g - \frac{3gy}{b}\right)$ . On obtient une valeur maximale en  $y = -b$  et  $\|\vec{N}\|_{max} = m\left(\frac{v_0^2}{b} + g\right)$ . En l'absence de mouvement ( $v_0 = 0$ ) on retrouve que la composante normale compense le poids en  $\theta = -\frac{\pi}{2}$ .

- A.3.5** Le patineur quitte le guide si la réaction normale s'annule, soit d'après l'expression précédente  $y_1 = \frac{v_0^2}{3g} - \frac{2}{3}b$ .  
 L'application numérique donne  $y_1 = 1,0$  m.

- A.3.6** Les coordonnées  $x_1$  et  $y_1$  sont données par  $x_1 = b\cos\theta_1$  et  $y_1 = b\sin\theta_1$  soit  $\theta_1 = 30^\circ$  et  $x_1 = 1,7$  m.

#### A.4

- A.4.1** D'après la question A.3.4, on a  $v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2g(y_1 + b)}$ .

- A.4.2** La vitesse au moment où le patineur quitte le support est portée suivant  $\vec{u}_\theta$ . L'angle  $\alpha$  entre le vecteur vitesse et l'axe ( $Ox$ ) est donc :  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \theta_1$  soit  $\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y_1}{x_1}$ . L'application numérique donne  $\alpha_1 = 1,2102^\circ$ .

- A.4.3** Dans le repère  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ ,  $\vec{v}_1 = v_1\cos\alpha_1\vec{u}_x + v_1\sin\alpha_1\vec{u}_y$ . On a alors  $v_{1x} = v_1\cos\alpha_1 = -1,6$  ms<sup>-1</sup> et  $v_{1y} = v_1\sin\alpha_1 = 2,7$  ms<sup>-1</sup>.

- A.4.4** Le patineur quittera le guide si  $N$  s'annule avant  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . En reprenant l'expression de  $N$  de la question A.3.4 et en remplaçant  $\theta$  par  $\frac{\pi}{2}$ , on obtient  $v_0 < \sqrt{5bg} = 9,9$  ms<sup>-1</sup>. Si  $v_0 > \sqrt{5bg}$ , le patineur fera une révolution complète sur le support sans jamais perdre le contact avec le sol.

- A.4.5** Après avoir quitté le guide, le patineur aura un mouvement de chute libre (mouvement uniformément accéléré).

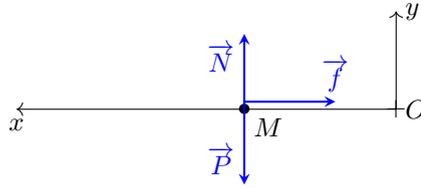
- A.4.6** On applique le principe fondamental de la dynamique au patineur qui n'est soumis qu'à son poids dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Son accélération vaut alors  $\vec{a} = -g\vec{u}_y$ . Par intégration successive on obtient son vecteur vitesse et son vecteur position :  $\vec{v} = v_{1x}\vec{u}_x + (v_{1y} - gt)\vec{u}_y$  et  $\vec{OM} = (v_{1x}t + x_1)\vec{u}_x + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_{1y}t + y_1)\vec{u}_y$ . Lorsque le patineur atteint le sol,  $y = -b$ , soit  $-\frac{1}{2}gt^2 + v_{1y}t + y_1 = -b$ . La résolution de cette équation fournit l'instant de contact avec le sol  $t_2 = 1,1$  s. On obtient ensuite  $v_{2x} = v_{1x} = -1,6$  m/s et  $v_{2y} = v_{1y} - gt_2 = -8,1$  m/s.

- A.4.7** Le point  $M_2$  a pour ordonnée  $y_2 = 0$  et pour abscisse  $x_2 = v_{1x}t_2 + x_1 = 0,44$  m. On suppose que le patineur retombe à coté du support...

## B Seconde partie : Mouvement sur le plat.

### B.1 Le frottement solide sur le sol est négligé dans un premier temps

**B.1.1** On considère un repère cartésien avec un axe ( $Ox$ ) horizontal orienté dans le sens du mouvement et un axe ( $Oy$ ) un axe ascendant. Le patineur assimilé à un point matériel est soumis dans le référentiel terrestre supposé galiléen au poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$ , à la réaction du support  $\vec{N} = N\vec{u}_y$  et à la force de frottement  $\vec{f} = -\alpha_F \dot{x}\vec{u}_x$ .

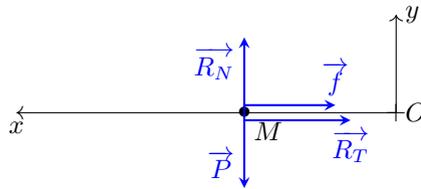


**B.1.2** On applique la deuxième loi de Newton :  $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f}$ . La projection de cette équation vectorielle suivant  $\vec{u}_x$  donne  $m\ddot{x} = -\alpha_F \dot{x}$ , soit  $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha_F}{m}v = 0}$ .

**B.1.3** On reconnaît une équation différentielle du premier ordre sans second membre :  $v(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{m}{\alpha_F}$  où  $K$  est une constante d'intégration qu'on calcule à partir de la condition initiale  $v(0) = v_2$  soit  $\boxed{v(t) = v_2 e^{-\frac{t}{\tau}}}$

**B.1.4** En intégrant la vitesse, on obtient  $x(t) = -v_2\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + K_2$  soit  $x(t) = v_2\frac{m}{\alpha_F}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$ . Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , on obtient  $\boxed{x_3 = v_2\frac{m}{\alpha_F} = 480 \text{ m}}$ .  $x_3 > D$ , le patineur tombe dans le précipice...mais cette distance est surévaluée ; il faut prendre en compte les frottements solide avec le sol.

### B.2 Prise en compte du frottement solide



#### B.2.1

- La projection de la deuxième loi de Newton suivant  $\vec{u}_y$  donne  $\vec{R}_N = mg\vec{u}_y$ .
- La projection de la deuxième loi de Newton suivant l'axe ( $Ox$ ) donne  $m\frac{dv}{dt} = -\alpha_F v - \alpha_S mg$  soit  $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha_F}{m}v = -\alpha_S g$ . La résolution de l'équation donne  $v(t) = -\frac{\alpha_S mg}{\alpha_F} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{m}{\alpha_F}$  et

$$K = v_2 + \frac{m\alpha_S g}{\alpha_F} \text{ soit } \boxed{v(t) = -\frac{m\alpha_S g}{\alpha_F} + (v_2 + \frac{m\alpha_S g}{\alpha_F})e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

- La durée  $t_m$  de freinage correspond à l'instant où la vitesse s'annule soit :  $e^{-\frac{t_m}{\tau}} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha_F v_2}{m\alpha_S g}}$  et

$$\boxed{t_m = \frac{m}{\alpha_F} \ln \left( 1 + \frac{\alpha_F v_2}{m\alpha_S g} \right)}$$

- En intégrant l'expression de  $v(t)$  que l'on met sous la forme  $v(t) = C + De^{-\frac{t}{\tau}}$  pour simplifier où  $C$  et  $D$  sont identifier à partir de l'expression de  $v$ . On a alors  $x(t) = Ct - D\tau e^{-\frac{t}{\tau}} + K_x$  et  $x(0) = 0$ , soit  $x(t) = Ct + D\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$  soit :

$$\boxed{x_3 = -\frac{m\alpha_S g}{\alpha_F} t_m + (v_2 + \frac{m\alpha_S g}{\alpha_F})\tau(1 - e^{-\frac{\alpha_F t_m}{m}})}$$

**B.2.2** L'application numérique donne  $t_m = 15,9 \text{ s}$  et  $x_3 = 12,6 \text{ m}$

## Exercice 2 Le piège de Paul

### A Préliminaire

**A.1** On peut citer :

- la force de rappel d'un ressort  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}$ ,  $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$  ;
- la force d'interaction gravitationnelle  $\vec{F} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2}\vec{u}$ ,  $E_p = -\frac{Gm_1 m_2}{r}$  ;
- la force d'interaction électrostatique  $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\vec{u}$ ,  $E_p = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$ ...

**A.2** Une masse reliée à un support fixe par un ressort et astreinte à se déplacer le long d'une tige (en négligeant bien sûr toute forme de frottements).

### B Étude d'un mouvement unidimensionnel

**B.1** On a  $\vec{F} = -2Kx\vec{e}_x$ . Le PFD en projection sur  $\vec{e}_x$  donne  $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2K}{m}x = 0$ .

**B.2** On vérifie que  $\frac{dE_p}{dx}(x=0) = 0$  et  $\frac{d^2E_p}{dx^2}(x=0) = 2K > 0$ , ce qui caractérise un équilibre stable.

**B.3** Si  $K < 0$ ,  $\frac{d^2 E_p}{dx^2}(x=0) = 2K < 0$  : l'équilibre est instable.

**B.4** Si  $K > 0$ ,  $M$  a un mouvement d'oscillations autour de  $O$  et reste donc au voisinage de  $O$  ; à l'inverse, si  $K < 0$ , la moindre perturbation éloigne  $M$  de la position  $x = 0$ .

## C Étude du régime statique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

**C.1** On a  $\vec{F} = -(2\Phi_0 a x \vec{e}_x + 2\Phi_0 a y \vec{e}_y + 2\Phi_0 b z \vec{e}_z)$  donc  $K_x = K_y = 2\Phi_0 a$  et  $K_z = 2\Phi_0 b$ .

**C.2** Le PFD donne

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2\Phi_0 a}{m} x = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{2\Phi_0 a}{m} y = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{2\Phi_0 b}{m} z = 0$$

**C.3** On a  $[\Phi_0] = MT^{-2}$  et  $[\frac{\Phi_0 a}{m}] = T^{-2}$  donc  $[a] = \frac{[m]T^{-2}}{[\Phi_0]} = 1$ .  $a$  et  $b$  sont donc sans dimension.

**C.4** Supposons  $a > 0$ . Alors nécessairement  $b < 0$ . Les équations en  $x$  et  $y$  sont celles d'oscillateurs harmoniques et correspondent à une particule piégée dans ces deux dimensions. Selon  $z$ , comme  $b < 0$ ,  $z = 0$  est une position d'équilibre instable et la particule quitte donc le voisinage de l'origine. Même raisonnement si  $b > 0$  et  $a < 0$ .

Il est donc impossible de piéger une particule chargée à l'aide d'un potentiel statique.

## D Etude du régime dynamique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel : piégeage

**D.1** Le PFD donne

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0^4}{8\Omega^2} x = 0$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{\omega_0^4}{8\Omega^2} y = 0$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0^4}{2\Omega^2} z = 0$$

**D.2** Sur chacun des axes, l'équation du mouvement est celle d'un oscillateur harmonique :  $(x=0, y=0, z=0)$  est une position d'équilibre stable. La particule est piégée. Par identification,  $\omega_x = \omega_y = \frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega}$  et  $\omega_z = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}\Omega}$ .

**D.3** Les solutions des équations différentielles sont

$$x(t) = A_x \cos \omega_x t + B_x \sin \omega_x t$$

$$y(t) = A_y \cos \omega_y t + B_y \sin \omega_y t$$

$$z(t) = A_z \cos \omega_z t + B_z \sin \omega_z t$$

A  $t = 0$ ,  $x(t=0) = 0$ ,  $y(t=0) = 0$ ,  $z(t=0) = 0$  donc  $A_x = A_y = A_z = 0$ .

Pour la vitesse, on a  $B_x \omega_x = v_0$ ,  $B_y \omega_y = v_0$  et  $B_z \omega_z = v_0$ .

Finalement,

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega_x} \sin \omega_x t = \frac{2\sqrt{2}v_0\Omega}{\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0^2}{2\sqrt{2}\Omega} t\right)$$

$$y(t) = 0$$

$$z(t) = \frac{v_0}{\omega_z} \sin \omega_z t = \frac{\sqrt{2}v_0\Omega}{\omega_0^2} \sin\left(\frac{\omega_0^2}{\sqrt{2}\Omega} t\right)$$

**D.4** L'amplitude de  $z(t)$  est deux fois plus petite que celle de  $x(t)$  ; d'autre part,  $\omega_z = 2\omega_x$  : la période du mouvement selon  $z$  est donc égale à la moitié de la période du mouvement selon  $x$ . On a donc

$$- A_z = \frac{A_x}{2}$$

$$- T_z = \frac{T_x}{2}$$

On en déduit que  $f(t)$  correspond à  $x(t)$  et  $g(t)$  à  $z(t)$ .

**D.5** Partons du point  $O$ , on commence par décrire le lobe de droite dans le sens horaire. On remarque alors que lorsque l'on a décrit ce lobe, le mouvement sur le lobe droit est identique pour l'axe vertical. Ainsi, la description totale de la trajectoire correspond à deux périodes sur l'axe vertical, une pour l'axe horizontal. Comme  $T_z = \frac{T_x}{2}$ , on en déduit que l'axe vertical correspond à l'axe  $Oz$  et l'axe horizontal à l'axe  $Ox$ .

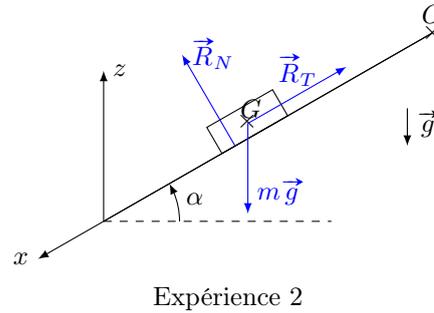
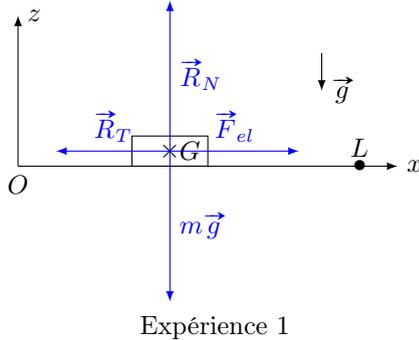
## Exercice 3 Le cadeau du père Noël...

### A Présentation de la démarche

On souhaite déterminer l'énergie élastique pouvant être stockée dans le camion, on pourra donc s'appuyer sur une démarche énergétique :

- Dans la première expérience, l'énergie initiale élastique du camion (ce qu'on cherche à déterminer) a été dissipée par des forces de frottements qui peuvent être des frottements solides (contact avec le sol via les 6 roues du camion) et des frottements fluides (force exercée par l'air sur le camion). L'objectif serait d'évaluer le travail de ces forces de frottements pour revenir à l'énergie élastique initiale du camion.

- Dans la deuxième expérience, le camion est mis en mouvement grâce à son énergie potentielle. L'étude menée peut nous permettre de déterminer le travail des forces non conservatives qui s'exerce sur le camion puis de remonter aux forces non conservatives (forces de frottement solide et fluide) qui s'exercent sur le camion pour retrouver l'énergie élastique initiale de l'expérience 1.



## B Hypothèses

- Le camion est assimilé à un point matériel  $G$  de masse  $m$  qui glisse avec frottement sur un support (on néglige les mouvements de rotations des roues. . .).
- On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
- Les forces qui s'exercent sur le camion sont le poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  où l'axe  $(Oz)$  est un axe ascendant (force conservative), la réaction tangentielle non conservative qui s'oppose au mouvement, la réaction normale du support qui ne travaille pas, la force de frottement de l'air non conservative et une force motrice élastique conservative.
- On suppose que les surfaces de l'expérience 1 et de l'expérience 2 sont similaires et que les forces de frottement solide du camion sont identiques sur les deux surfaces (hypothèse évoquée dans le texte).
- On néglige les frottements de l'air devant les frottements solides (6 roues en contacts avec le sol, faible surface et faible vitesse) et on suppose que la force de frottement solide à une norme constante  $R_T$ .

## C Exploitation de l'expérience 1

On applique le théorème de l'énergie mécanique au camion dans le référentiel terrestre supposé galiléen entre l'instant initial  $I$  et l'instant final  $F$  :  $\Delta_{I \rightarrow F} E_m = W_{I \rightarrow F}(\vec{R}_T)$  avec  $E_m = E_c + E_{pe}$  puisque l'énergie potentielle de pesanteur n'intervient pas dans cette expérience. L'énergie cinétique initiale et finale sont nulles et l'énergie mécanique finale est également nulle si on considère que toute l'énergie élastique initiale a été consommée. Ainsi en appelant  $L$  la distance parcourue par le camion :

$$\Delta_{I \rightarrow F} E_m = -E_{peI} = W_{I \rightarrow F}(\vec{R}_T) = -R_T L \text{ soit } E_{peI} = R_T L$$

## D Exploitation de l'expérience 2

On applique le théorème de l'énergie mécanique au camion dans le référentiel terrestre supposé galiléen entre l'instant initial  $t = 0$  et l'instant final  $t_f = 1,2\text{s}$  de cette expérience. L'énergie cinétique s'écrit  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  et l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp} = mgz = -mgx \sin \alpha$ . On appelle  $x_f = x(t_f)$  et  $v_f = v(t_f)$  la vitesse à l'instant  $t_f$  qui pourra être déterminée en exploitant la courbe de la position en fonction du temps (pente à l'instant  $t_f$ ).

$$\Delta E_m = W(\vec{R}_T) = -R_T x_f = \frac{1}{2}mv_f^2 - mgx_f \sin \alpha$$

On en déduit  $R_T = mg \sin \alpha - \frac{1}{2x_f}mv_f^2$ .

L'exploitation de la courbe permet d'obtenir pour  $t_f = 1,2\text{s}$ ,  $x(t_f) = x_f = 83\text{cm}$  et on peut obtenir la vitesse en déterminant le coefficient directeur de la pente à la courbe à l'instant  $t = t_f$ . On obtient alors  $v_f = v(t_f) = 1,4\text{ m s}^{-1}$ . On a ainsi  $R_T = 23 \times 10^{-3}\text{ N}$

## E Résultat obtenu, conclusion et validation

L'exploitation des deux expériences conduit à  $E_{pe} = R_T L = 81 \times 10^{-3}\text{ J}$ .

Validation du modèle :

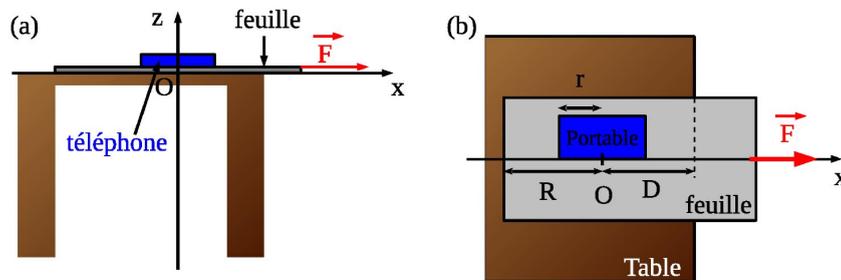
- On a une énergie de l'ordre de quelques dizaines de mJ, ce qui est plutôt faible mais compatible avec l'énergie stockée dans un jouet. C'est la même énergie qu'un moteur électrique de jouet alimenté par une pile AA de 1,5 V dépenserait en étant parcouru par 8 mA pendant 7 s ( $W_m = Ei\Delta t$ ).
- L'hypothèse la plus forte est de négliger les forces qu'exercent l'air sur le camion (force proportionnelles à la vitesse). On pourrait refaire le raisonnement en les considérant quasiment voisines : en effet dans la seconde expérience la vitesse moyenne est plus importante mais l'expérience dure moins longtemps.

- On vérifie également qu'on ne peut pas négliger les frottements solides dans l'expérience 2 : la position atteinte en  $t_f = 1,2\text{s}$  avec une accélération constante  $g \sin \alpha$  aurait été de  $x_{sf}(t_f) = \frac{1}{2}g \sin \alpha t_f^2 = 1,4\text{m} > x_f$ . Ce sont d'ailleurs les frottements (adhérence) qui permettent au camion d'avancer.
- On constate que lors de l'expérience 1, le camion n'a pas libéré toute son énergie élastique, puisque lorsqu'on le soulève, les roues se mettent à tourner (la condition de glissement n'était plus vérifiée à la fin de l'expérience 1. On a donc sous évalué l'énergie élastique maximale.

## Exercice 4 Résolution de problème : Retirer une nappe sans faire tomber la vaisselle

### S'approprier le problème

On travaille dans le référentiel  $R$  lié à la table (terrestre), supposé galiléen. On commence par schématiser la situation sur la Figure ci-dessous. On appelle  $O$ , origine de l'axe horizontal (axe  $(Ox)$ ), la position initiale du centre d'inertie du téléphone portable. Les distances caractéristiques  $R$ ,  $r$  et  $D$  sont représentées sur la vue de dessus (b).



On appelle  $m$  la masse de la feuille,  $M$  celle du téléphone et  $g = 9,8\text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ , l'intensité du champ de pesanteur. On note  $\vec{F} = F\vec{u}_x$  ( $F > 0$ ) la force exercée par l'opérateur sur la feuille. On suppose que cette force est nulle pour  $t < 0$  puis constante (réponse à un échelon). On notera  $\mu$  le coefficient de frottement du téléphone sur la feuille de papier. On négligera la différence entre coefficient statique et dynamique. Concernant les valeurs numériques, on prend  $m = 5\text{ g}$  et pour le téléphone  $M = 100\text{ g}$ .

Enfin, on peut considérer que  $\mu$  est compris entre 0,2 et 0,4. Pour obtenir cet ordre de grandeur, on peut poser son téléphone sur un papier, posé lui-même sur un cahier rigide horizontal. On incline l'ensemble d'un angle  $\alpha$ . Si le téléphone glisse pour un angle  $\alpha_c$ , on a  $\mu = \tan \alpha_c$ . Expérimentalement, on obtient des angles  $\alpha_c$  entre  $10^\circ$  et  $20^\circ$ , soit  $0,18 < \alpha_c < 0,36$ .

On considérera un mouvement à un seul degré de liberté le long de l'axe  $(Ox)$  confondu avec la droite d'action de la force  $\vec{F}$ , comme le montre la figure (a).

### Analyse et réalisation

#### PFD au système téléphone

On considère le système téléphone assimilé à un point matériel dans le référentiel de la table. Le téléphone est soumis à son poids  $\vec{P} = -Mg\vec{u}_z$ , la réaction de la feuille sur le téléphone :  $\vec{R}_{f \rightarrow t} = N\vec{u}_z + T\vec{u}_x$ . Tant que le téléphone ne décolle pas, on a  $N > 0$  et  $T$  est algébrique. La projection du PFD selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$  donne :

$$M\ddot{x}_t = T \quad (1)$$

$$0 = N - Mg \quad (2)$$

A partir des relations (2) et (4) on obtient  $N = Mg$  et  $N_t = (M + m)g$ ; la composante normale de l'action de la table compense le poids de l'ensemble {téléphone,feuille}.

#### Condition de glissement du téléphone sur la feuille

Dans un premier temps, il faut nécessairement que le téléphone glisse sur la feuille. À partir de  $t = 0$ , on suppose qu'il n'y a pas glissement du téléphone sur la feuille. On a donc  $x_t(t) = x_f(t) = x(t)$  à tout instant, tant que  $|T| < \mu Mg$ . En sommant les équations (1) et (3) pour éliminer  $T$  on obtient  $(M + m)\ddot{x} = F$  et avec l'équation (1), on obtient  $T = \frac{M}{M+m}F > 0$

Pour que le téléphone glisse sur la feuille, il faut  $F > \mu(M + m)g$  (CG)

Avec les valeurs numériques choisies, on a une force minimale comprise entre 0,2 N et 0,4 N selon la valeur de

#### PFD au système feuille

La feuille est soumise à son poids  $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$  à la réaction du téléphone sur la feuille  $\vec{R}_{t \rightarrow f} = -N\vec{u}_z - T\vec{u}_x$  (troisième loi de Newton), à la force de l'opérateur  $\vec{F} = F\vec{u}_x$  et la réaction de la table  $\vec{R}_t = N_t\vec{u}_z$  (On suppose qu'il n'y a pas de frottement de glissement entre la table et la feuille). La projection du PFD appliqué à la feuille selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$  donne :

$$m\ddot{x}_f = F - T \quad (3)$$

$$0 = N_t - N - mg \quad (4)$$

$\mu$ , soit une force de l'ordre de grandeur du poids de l'ensemble téléphone, feuille, pondéré du coefficient  $\mu$ . Si cette condition est facilement remplie pour le téléphone sur la feuille, elle devient plus délicate dans le cas de nombreux couverts et assiettes sur une nappe...

### Condition sur le retrait de la feuille

Même si le téléphone glisse sur la feuille, il va se déplacer vraisemblablement, comme la feuille, dans le sens de  $\vec{F}$ . Il faut donc aussi que le contact feuille/téléphone cesse avant que le téléphone n'atteigne le bord de la table.

On fait l'hypothèse qu'à partir de l'instant  $t = 0$ , il y a glissement du téléphone sur la feuille. On a donc  $|T| = \mu N = \mu Mg$  à tout instant. On suppose également que  $0 < \dot{x}_t < \dot{x}_f$  c'est-à-dire que la vitesse du téléphone par rapport à la feuille est selon  $\vec{u}\vec{x}$ , ce qui conduit à écrire  $T > 0$ . En reprenant les équations (1) et (3), on a  $\ddot{x}_t = \mu g$  et  $\ddot{x}_f = \frac{F - \mu Mg}{m}$  soit par intégrations successives  $x_t(t) = \frac{1}{2}\mu g t^2$  et  $x_f(t) = \frac{F - \mu Mg}{2m} t^2$ .

On introduit la distance  $\delta(t) = x_f(t) - x_t(t) = \frac{1}{2m}(F - \mu(M + m)g)t^2$ . La feuille sera retirée de sous le téléphone à partir de l'instant  $t_0$  où  $\delta(t_0) = R + r$  (figure (b)). On obtient alors  $t_0 = \sqrt{\frac{2m(R+r)}{F - \mu(M+m)g}}$ . Pendant cette phase d'entraînement, il ne faut pas que le centre d'inertie du téléphone quitte la table. Il faut donc que  $x_t(t_0) < D$  soit  $\frac{1}{2}\mu g t_0^2 < D$ . En utilisant l'expression de  $t_0$  trouvée précédemment, on obtient que la force  $F$  doit être telle que :

$$F > \frac{\mu m g (R+r) + \mu (M+m) g D}{D}$$
. Pour simplifier cette expression littérale sans changer radicalement la généralité du problème, on peut étudier le cas où  $D = R$ , ce qui conduit à :  $F > \mu(M + m(2 + \frac{r}{R}))g$ .

Même si l'expression de cette force limite est plus complexe que celle obtenue par la relation (CG) de l'approche préliminaire, il n'y a en pratique que peu de changement car  $m \ll M$ , ce qui atténue considérablement l'effet du terme correctif  $(2 + \frac{r}{R})$ . L'application numérique donne pour  $\mu = 0,2$ ,  $R = D = 20 \text{ cm}$  et  $r = 5 \text{ cm}$  donne  $F_{lim} = 0,23 \text{ N}$  au lieu des  $0,21 \text{ N}$  de la condition (CG).

### Condition sur l'arrêt du téléphone avant le bord de la table :

Même si la feuille a été retirée de sous le téléphone avant qu'il n'atteigne le bord de la table, ce dernier aura une vitesse  $\dot{x}_t(t_0) = \mu g \sqrt{\frac{2m(R+r)}{F - \mu(M+m)g}}$  non nulle à l'abscisse  $x_t(t_0) = \frac{\mu m g (R+r)}{F - \mu(M+m)g}$ . S'il n'y a pas de frottement de la table sur le téléphone, ce dernier va atteindre le bord de la table à vitesse constante. Il faut donc prendre en compte le coefficient de frottement table/téléphone, noté  $\mu_0$ .

Après un nouveau bilan des forces sur le téléphone, la méthode la plus efficace consiste à utiliser le théorème de l'énergie cinétique. Avant que le téléphone n'atteigne le bord de la table, il faut que le travail résistant de la force de frottement sur la distance  $R - x_t(t_0)$  dissipe l'énergie cinétique  $\frac{1}{2}M\dot{x}_t^2(t_0)$  acquise dans le référentiel lié à la table, soit :  $\frac{1}{2}M\dot{x}_t^2(t_0) < \mu_0 M g (R - x_t(t_0))$ . Quelques lignes de calculs conduisent à une nouvelle expression de la valeur minimale de la force à appliquer :

$$F > \mu g \left[ M + m \left( \frac{1 + \mu + \mu_0}{\mu_0} + \frac{(1 + \mu)r}{\mu_0 R} \right) \right]$$

On retrouve logiquement que pour un  $\mu_0$  très faible, il faut une force très grande pour éviter de faire chuter le téléphone. Numériquement, en prenant  $\mu_0 = \mu = 0,2$ , on obtient une force  $F_{lim} = 0,29 \text{ N}$ , du même ordre de grandeur que les conditions précédentes ( $0,23 \text{ N}$  et  $0,21 \text{ N}$ ).

## Regard critique sur les résultats obtenus

On constate clairement qu'il faut avoir un coefficient de frottement  $\mu$  le plus faible possible pour ne nécessiter qu'une faible force  $F$ . Ceci dit, dans le cas où il n'y a qu'une assiette, la force à exercer est de toute façon très raisonnable. Au passage, dans le cas asymptotique  $\mu = 0$ , on retrouve évidemment qu'il y a toujours glissement entre le téléphone et la feuille et qu'une force  $F$  minimale suffit à réaliser l'expérience. D'ailleurs, la résolution conduirait à  $x_t(t) = 0$  : le téléphone ne bouge pas !

En revanche une fois la feuille retirée de sous le téléphone, il faut ralentir efficacement la vitesse acquise par le téléphone dans  $R$ . Il faut donc des frottements « importants » entre le téléphone et la table. Sans ces derniers, même avec une vitesse  $\dot{x}_t(t_0)$  minimale, le téléphone glisserait inévitablement jusqu'au bord de la table...

Sur le même sujet, vous pouvez visionner la video suivante : <https://www.youtube.com/watch?v=pHa5H2HWrF8>.