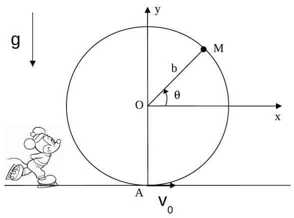
Exercice 1 Looping sur la glace



On considère un patineur assimilé à un point matériel M de masse $m = 60{,}0\,\mathrm{kg}$. Celui-ci se déplace sans frottement **à l'intérieur** d'un guide circulaire de centre O et de rayon $b = 2{,}0\,\mathrm{m}$. Le guide est placé dans un plan vertical du référentiel terrestre supposé galiléen. L'axe (Oy) est vertical ascendant. On note $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ l'accélération de pesanteur au lieu considéré. Le patineur s'élance dans le guide au niveau du point A (en bas du guide) avec la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$. Dans la suite, on prendra : $v_0 = 8{,}3\,\mathrm{m/s}$.

A Première partie : mouvement dans le guide.

A.1 Pour une position quelconque de M sur le guide, rappeler la définition des vecteurs unitaires radial $\overrightarrow{u_r}$ et orthoradial $\overrightarrow{u_\theta}$ de la base polaire. Les faire apparaître sur un schéma.
Exprimer dans cette base, les vecteurs vitesse et accélération du point M.

A.2 Faire un bilan des forces s'exerçant sur le point M quand il est en contact avec le guide. On appellera $\overrightarrow{N}$ la force de contact du guide sur le patineur (= la réaction du support). Faire apparaître ces forces sur le schéma précédent.

A.3 Étude du mouvement à l'intérieur du guide.

A.3.1 Écrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen.

A.3.2 Projeter l'équation obtenue sur $\overrightarrow{u_\theta}$, puis la multiplier par $\dot{\theta}$. En déduire par intégration la relation entre $\dot{\theta}$ et θ, à l'instant t.

A.3.3 À partir de la relation précédente, exprimer le carré de la norme du vecteur vitesse $\|\overrightarrow{v}\|^2$ en fonction de la coordonnée y du point M et des constantes du problème.

A.3.4 En déduire la norme de $\overrightarrow{N}$ en fonction de y et des constantes du problème. En quel point, la norme $\|\overrightarrow{N}\|$ est-elle maximale ?

A.3.5 Pour quelle valeur y_1 de y le patineur quitte-t-il le guide ? Faire l'application numérique.

A.3.6 On note M_1 le point où le contact cesse. Déterminer ses coordonnées notées x_1 et y_1.

A.4 On appelle v_1 la norme de $\overrightarrow{v_1}$, vitesse au point M_1.

A.4.1 Exprimer v_1 en fonction de y_1 et des constantes du problème.

A.4.2 Quel est l'angle α_1 que fait le vecteur $\overrightarrow{v_1}$ avec l'axe (Ox) ? La réponse sera donnée en fonction de x_1 et y_1 coordonnées du point M_1. Donner l'application numérique.

A.4.3 Donner les valeurs des composantes suivant (Ox) et (Oy) de la vitesse au point M_1. Faire l'application numérique pour les composantes v_{1x} et v_{1y} ?

A.4.4 À quelle condition sur v_0 le patineur quittera-t-il le guide au cours de son mouvement ? Faire l'application numérique.

A.4.5 Quelle est la trajectoire suivie ensuite par le mobile après avoir quitté le guide ? On négligera toutes formes de frottement dans cette partie.

A.4.6 Déterminer les composantes v_{2x} et v_{2y} de la vitesse lorsque le mobile atteint l'axe (Ox). Faire l'application numérique.

A.4.7 En quel point M_2 de l'axe (Ox) le point M retombe-t-il ?

B Seconde partie : Mouvement sur le plat.

On considère maintenant que le sol a amorti la chute. À $t = 0$, la vitesse du patineur est alors à la composante horizontale de sa vitesse $\overrightarrow{v_2}$. On prendra une vitesse initiale $v_2 = 1{,}6\,\mathrm{m/s}$.
Une fois arrivé sur le plat, le patineur doit s'arrêter promptement afin d'éviter de basculer dans un précipice insondable situé à une distance D du point d'impact. Pour cela, il optimise sa prise au vent, et subit ainsi une force de frottement fluide linéaire : $\overrightarrow{f} = -\alpha_F\overrightarrow{v}$.

B.1 Le frottement solide sur le sol est négligé dans un premier temps

B.1.1 Choisir le système de repérage adapté à cette étude. Préciser sur un schéma le repère utilisé et représenter les forces qui s'exercent sur le point M.

B.1.2 Établir l'équation différentielle vérifiée par la vitesse v ($\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$) du point matériel.

B.1.3 Résoudre cette équation et exprimer la distance x_3 sur laquelle le point M va glisser.

B.1.4 Calculer numériquement x_3 puis conclure. On donne :
- $m = 60{,}0\,\mathrm{kg}$
- $\alpha_F = 0{,}200\,\mathrm{kg/s}$
- $D = 70{,}0\,\mathrm{m}$

Discuter en quoi ce mouvement peut sembler paradoxal.

B.2 Prise en compte du frottement solide

Devant le danger, le patineur décide de déraper sur ses patins afin d'exercer sur le sol une force de frottement solide de coefficient dynamique α_S. La force de réaction du support présente une composante normale $\overrightarrow{R_N}$ et une composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ opposée à la vitesse, telle que $\overrightarrow{R_T} = -\alpha_S R_N \overrightarrow{u_x}$. Les conditions initiales et le frottement fluide sur l'air sont les mêmes que précédemment.

B.2.1 Après avoir représenté les forces sur un schéma, exprimer :
- l'expression de $\overrightarrow{R_N}$ en fonction des données,
- la vitesse $v(t)$ au cours du freinage,
- la durée t_m du freinage,
- la nouvelle distance d'arrêt x_4.

B.2.2 Calculer numériquement cette durée et cette distance. On donne : $\alpha_S = 0,0100$.

Exercice 2 Le piège de Paul

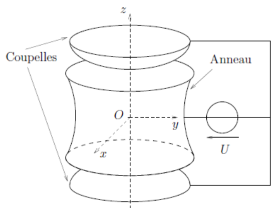
Les techniques d'analyse de la matière par spectrométrie de masse occupent une place grandissante, notamment dans l'étude de composés biologiques. Après ionisation, la matière est injectée dans un système analyseur, capable de séparer les composants élémentaires en fonction de leurs masses. L'objet de cette partie est la présentation et l'étude d'un type d'analyseur : l'analyseur à piège à ions. Le principe repose sur le piégeage de la matière ionisée au voisinage d'une position d'équilibre stable.

Le composant principal est un piège de Paul, mis au point dans les années 1950 par le physicien allemand Wolfgang Paul. Ce travail lui vaudra d'être récompensé par une partie du prix Nobel de physique, en 1989.

Le piège de Paul, dont le schéma est représenté sur la figure ci-dessous, est constitué de trois électrodes. Deux électrodes en forme de coupelles qui sont reliées à la masse d'un générateur et une électrode en forme d'anneau qui est portée au potentiel électrique U. Du fait de la forme des électrodes et de la tension électrique, les particules chargées subissent, au voisinage de O, une force qui dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p(x, y, z) = \Phi(ax^2 + ay^2 + bz^2)$$

où Φ dépend de la charge de la particule et de la tension U ; et a et b sont deux constantes.



Donnée : Une force $\overrightarrow{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p lorsque

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$$

L'expression du gradient en coordonnées cartésiennes dans la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ est donnée :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{e_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{e_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{e_z}$$

Le terme $\frac{\partial f}{\partial x}$ correspond à une dérivée partielle, cela revient à dériver la fonction f en fonction de x en considérant que y et z sont constants. Il en est de même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$.

L'objectif de l'exercice est d'apprécier les conditions de piégeage d'une particule. Dans la suite, on considère que la particule est complètement piégée si elle se comporte comme un oscillateur harmonique dans les trois dimensions de l'espace. Dans tout le problème, l'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

A Préliminaire

A.1 Donner trois exemples de forces qui dérivent d'une énergie potentielle.

A.2 Proposer un dispositif simple permettant de réaliser un oscillateur harmonique à une dimension.

B Etude d'un mouvement unidimensionnel

Un point matériel M de masse m se déplace le long d'un axe Ox (donc $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{e_x}$), au voisinage du point O. Pour cette étude, la seule force $\overrightarrow{F}$ à considérer dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p(x) = Kx^2$$

où K est une constante positive ou négative.

B.1 Exprimer $\overrightarrow{F}$ en fonction de K et x. Déduire l'équation du mouvement.

B.2 Dans le cas où $K > 0$, montrer que $x = 0$ est une position d'équilibre stable.

B.3 Lorsque $K < 0$, tracer l'allure de l'énergie potentielle. Comment caractériser la position $x = 0$?

B.4 Pourquoi estime-t-on que M est piégé lorsque $K > 0$ et libre pour $K < 0$?

C Etude du régime statique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel

Dans cette partie, la tension est constante $U = U_0$ et il en est donc de même pour $\Phi = \Phi_0$. Le système étudié est un point matériel M de masse m. La seule force qu'il subit est la force qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x, y, z)$.

C.1 Montrer que $\overrightarrow{F} = -(K_x x\overrightarrow{e_x} + K_y y\overrightarrow{e_y} + K_z z\overrightarrow{e_z})$ où $\overrightarrow{F}$ est la force que subit M. Exprimer K_x, K_y et K_z en fonction de a, b et Φ_0.

C.2 Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour établir les trois équations du mouvement.

C.3 D'un point de vue dimensionnel, on a $[\Phi_0] = MT^{-2}$ (Φ_0 est le produit d'une masse par l'inverse d'un temps au carré). Déduire la dimension de a et b.

C.4 On admet qu'en conséquence des équations fondamentales de l'électromagnétisme, dans ce cas statique, a et b doivent vérifier la relation :

$$2a + b = 0$$

Que peut-on déduire quant à la possibilité de piéger une particule chargée dans ce dispositif ?

D Etude du régime dynamique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel : piégeage

L'idée de Wolfgang Paul est de contourner cette impossibilité de pièger une particule chargée à l'aide d'un potentiel purement statique, en utilisant un potentiel oscillant de pulsation Ω, de sorte que $\Phi = \Phi_0 \cos \Omega t$.

Dans le cas où $\Omega \gg \omega_0 = \sqrt{\frac{|\Phi_0|}{m}}$, on montre que tout se passe, approximativement, comme si la particule évoluait avec une énergie potentielle effective :

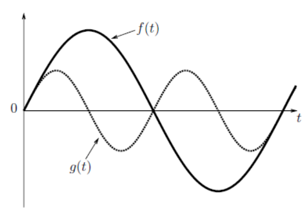
$$E_{p,eff} = \frac{m{\omega_0}^4}{16\Omega^2}(x^2 + y^2 + 4z^2)$$

D.1 Écrire les nouvelles équations différentielles vérifiées par x, y et z.

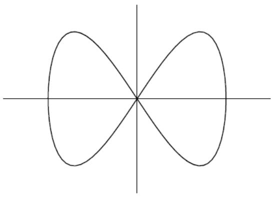
D.2 Montrer que la particule est piégée. Le mouvement de cette dernière est un mouvement oscillant sur chacun des axes. Exprimer les pulsations d'oscillation ω_x, ω_y et ω_z sur Ox, Oy et Oz en fonction de ω_0 et Ω.

D.3 A $t = 0$, la particule est injectée dans le piège en O avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0(\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_z})$. Calculer les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

D.4 Les fonctions $x(t)$ et $z(t)$ sont représentées ci-dessous sur le même graphe. Identifier les deux fonctions.



D.5 L'allure de la trajectoire de la particule est tracée ci-dessous. Reproduire cette figure en identifiant, en le justifiant, les axes Ox et Oz. Conclure quant à l'efficacité du piège.

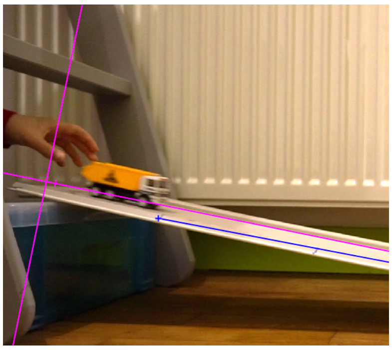


Exercice 3 Le cadeau du père Noël...

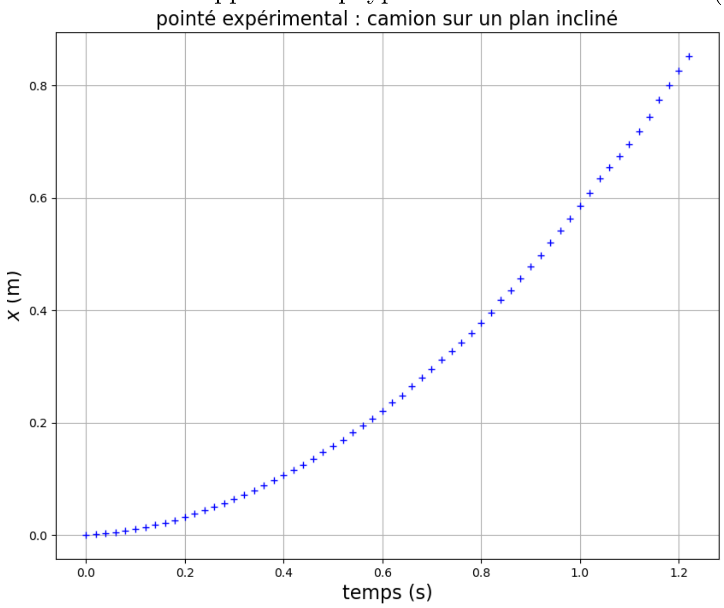
Comme tous les ans le père Noël a pu gâté le plus grand nombre. Le petit Yves a par exemple reçu un magnifique camion jaune avec « retro-friction ». Cela signifie que lorsque le camion recule en étant maintenu, il accumule de l'énergie élastique qu'il pourra dans un deuxième temps libérer pour se mettre en mouvement.

D'un naturel curieux, le petit Yves s'interroge sur la valeur numérique de la quantité d'énergie pouvant être stockée dans ce camion. Pour l'aider dans sa réflexion il a réalisé deux expériences avec son camion :

- Lors de la première expérience, il a stocké un maximum d'énergie dans son camion puis l'a lâché sans vitesse initiale sur une surface horizontale. Le camion a alors parcouru une distance de 3,5 m avant de s'arrêter en une durée de 7 s.
- Lors de la seconde expérience, il l'a lâché sans vitesse initiale et sans énergie élastique initiale sur un plan incliné de surface similaire à celle de la première expérience. Il a filmé cette expérience pour pointer à l'aide du logiciel Tracker la position du camion au cours du temps. Avec les données de position et de temps il a pu tracer sous python l'évolution de la position au cours du temps. L'angle du plan incliné (11,5 °) a été mesuré à l'aide de l'outil inclinaison de l'application phyphox et la masse du camion (30 g) à l'aide d'une balance de cuisine.



Capture d'écran du logiciel Tracker. L'axe (Ox) est défini dans le sens et la direction du mouvement.



Évolution de la position du camion au cours du temps (courbe obtenue à l'issu du pointage vidéo).

Question : En exploitant les expériences proposées, déterminer l'énergie élastique pouvant être stockée dans le camion. Ceci constitue une question ouverte qui peut être résolue par différentes approches. Cette question sera évaluée par compétences (Analyser/Raisonner, Réaliser, Valider, Communiquer), les approches envisagées, les hypothèses, les raisonnements devront être explicités et les résultats obtenus discutés ; autrement dit aucun résultat « tombé du camion » ne sera accepté...

Exercice 4 Résolution de problème : Retirer une nappe sans faire tomber la vaisselle

On peut trouver facilement sur internet des vidéos montrant une personne enlever une nappe tout en laissant la vaisselle sur la table. De façon plus modeste on peut faire la même expérience avec un téléphone portable et une feuille de papier.

Question : Quelle force minimale faut-il exercer sur la feuille de papier pour que le téléphone glisse sur cette feuille ? Cela suffit-il pour que le téléphone ne tombe pas du bureau ?