TD Signaux électriques n° 3

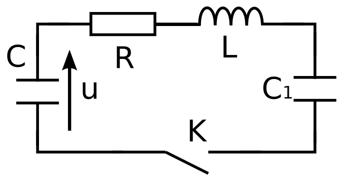
Oscillateurs amortis

Capacités exigibles :

- Analyser sur des relevés expérimentaux l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques ✠.
- Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétique ⌑.
- Déterminer des conditions initiales et finales à partir d'une approche qualitative ◐.
- Résoudre une équation différentielle du second ordre ☼.
- Déterminer la nature du régime libre et connaître les caractéristiques de chacun de ces régimes ⋈.

Exercice 1 Décharge d'un condensateur dans un circuit RLC ◐☼⋈

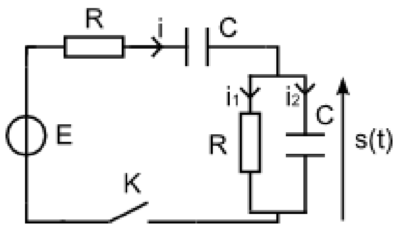
On considère le montage suivant où l'on ferme l'interrupteur K à l'instant $t = 0$. Le condensateur de capacité C est initialement chargé sous une tension u_0 (charge q_0), tandis que le condensateur de capacité C_1 est initialement déchargé.



1. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par l'intensité i(t) circulant dans le circuit ?
2. Déterminer l'expression de C_1 en fonction de R, L, C, correspondant à un régime critique de décharge, puis calculer C_1. AN : $L = 0,10\ H$, $C = 1,0.10^{-7}\ F$, $R = 4\ k\Omega$ et $u_0 = 10\ V$.
3. Trouver l'expression du courant $i(t)$ et représenter le graphe de $|i(t)|$.

Exercice 2 Pont de Wien ◐☼⋈***

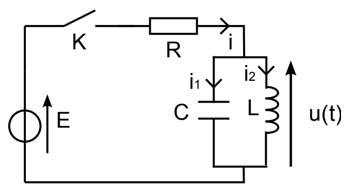
On considère le circuit représenté sur la figure suivante. Les condensateurs sont initialement déchargés. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.



1. Déterminer en vous appuyant sur des arguments physiques les grandeurs suivantes $s(0^+)$, $i(0^+)$, $i_1(0^+)$ et $i_2(0^+)$ puis $s(\infty)$, $i(\infty)$, $i_1(\infty)$ et $i_2(\infty)$.
2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$ est de la forme : $\frac{d^2s}{dt^2} + 3\omega_0\frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ où on exprimera ω_0 en fonction de R et C.
3. Résoudre cette équation différentielle. On appellera r_1 et r_2 les deux racines du polynôme caractéristique et on déterminera les constantes d'intégrations en fonction de r_1 et r_2.

Exercice 3 Circuit RLC quelconque ◐☼⋈

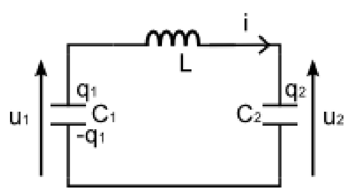
On considère le circuit suivant : L'interrupteur K est fermé à $t = 0$ tandis que le condensateur de capacité C est initialement déchargé. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = RC\omega_0$.



1. Déterminer les conditions initiales et finales pour i_1, i_2 et u.
2. Établir l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.
3. On suppose $Q > \frac{1}{2}$, déterminer les expressions de $i_1(t)$ et $i_2(t)$

Exercice 4 Étude d'un circuit oscillant ⌑☼

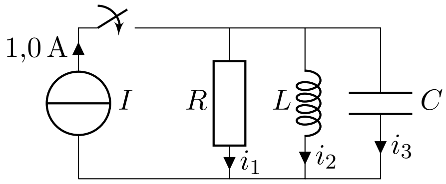
À l'instant $t = 0$, un condensateur de capacité C_1 et de charge initiale Q_0 est connecté à un groupement série L, C_2. Le condensateur de capacité C_2 est initialement déchargé. On suppose que $C_1 = C_2 = C$ et on note q_1, q_2 les charges des condensateurs sous les tensions u_1, u_2. Le sens positif du courant est indiqué sur la figure. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$.

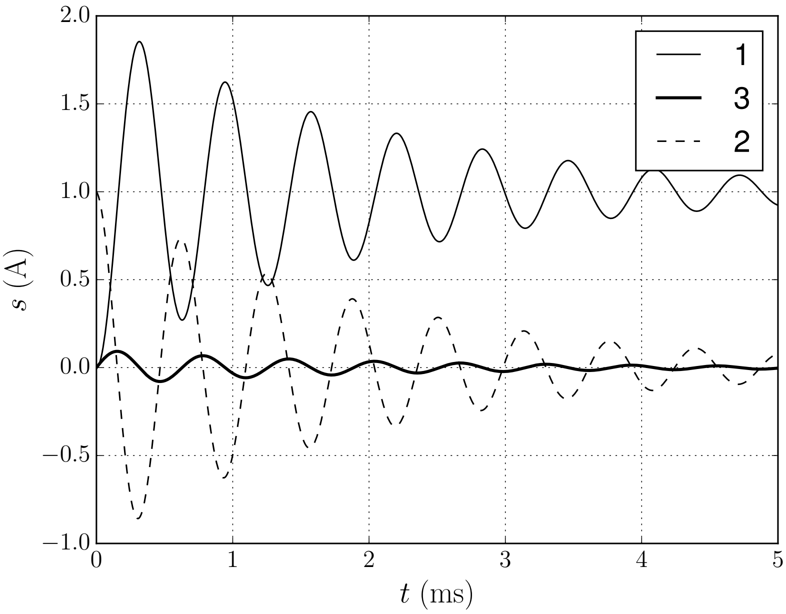


1. Établir les expressions de $u_1(t)$ et $i(t)$, puis représenter l'allure des graphes correspondants.
2. Effectuer un bilan énergétique instantané entre t et $t + dt$, puis sur une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Exercice 5 Circuit RLC parallèle ✠◐◐☼⋈

On dispose du circuit RLC parallèle ci-dessous. Le condensateur de capacité C est déchargé pour $t < 0$. À $t = 0$ on ferme l'interrupteur, alimentant ainsi le circuit par un échelon de courant d'intensité $I = 1{,}0\,\mathrm{A}$. On donne $R = 1{,}0 \times 10^4\,\Omega$ et $L = 0{,}10\,\mathrm{H}$.



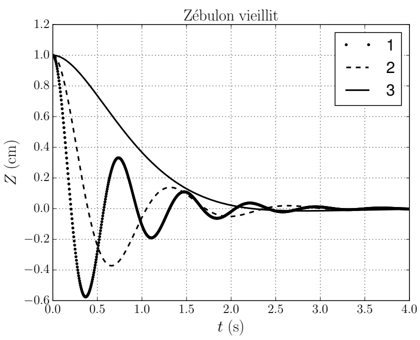


1. La figure ci-contre représente l'évolution des trois courants i_1, i_2 et i_3 en fonction du temps, mais un esprit farceur a mélangé les labels. Pouvez-vous, en justifiant soigneusement les raisonnements menés, associer les trois courbes 1, 2, 3 aux différents courants ?
2. Établir l'équation différentielle satisfaite par i_2.
3. À partir des graphes des intensités, estimer la valeur de la capacité C du condensateur.

Exercice 6 Zébulon prend de l'âge ☼⋈

Le petit Jean se désespère : son jouet favori, Zébulon, personnage monté sur ressort, n'oscille plus aussi bien qu'auparavant. Zébulon (masse initiale $m = 0{,}20\,\mathrm{kg}$) est relié au sol par l'intermédiaire d'un ressort de raideur initiale $k = 15\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ et de longueur à vide l_0 et est soumis à une force de frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$. Oz étant un axe vertical ascendant, Zébulon est repéré par sa cote z par rapport au sol horizontal.

1. Quelle est l'unité de h ? Quelles sont les actions auxquelles est soumis Zébulon ? Déterminer l'équation du mouvement de Zébulon et sa position d'équilibre z_{eq}.
2. On pose $Z(t) = z(t) - z_{eq}$. Montrer que $Z(t)$ est solution d'une équation d'oscillateur amorti, dont on déterminera la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q.
3. Les courbes ci-contre montrent l'évolution des oscillations de Zébulon à mesure qu'il prend de l'âge, la courbe 1 étant celle de sa jeunesse. Déduire de l'examen de ces courbes lequel des deux paramètres m ou k est affecté par le vieillissement de Zébulon. Ce paramètre croît-il ou décroît-il avec l'âge de Zébulon ?
4. Pour un régime pseudo-périodique, on définit le décrément logarithmique $\delta = \ln\left(\dfrac{Z(t)}{Z(t+T)}\right)$ où T est la pseudo-période des oscillations. En utilisant cette notion et à l'aide des courbes fournies, déterminer la valeur du coefficient de frottement h.



Solutions des exercices

[1] *Réponses : 1)* $\frac{d^2i}{dt^2} + 2z\omega_0\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$ *avec* $z = \frac{R}{2L\omega_0}$ *et* $\omega_0^2 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_1}\right)$ *; 2)* $C_1 = \frac{4LC}{R^2C - 4L}$ *; 3)* $i(t) = -\frac{u_0}{L}te^{-\omega_0 t}$

[2] *Réponses : 3)* $s(t) = \frac{E}{\sqrt{5}}(e^{r_1 t} - e^{r_2 t})$

[3] *Réponses : 2)* $\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

[4] *Réponses : 1)* $u_1 = \frac{Q_0}{2C}(1 + \cos\omega_0 t)$ *;* $i = \frac{Q_0\omega_0}{2}\sin\omega_0 t$

[5] *Réponses : 2)* $\dfrac{\mathrm{d}^2 i_2}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{1}{RC}\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{LC}i_2 = \dfrac{I}{LC}$ *; 3)* $C = \dfrac{1}{L\omega_0^2} \simeq \dfrac{T^2}{4\pi^2 L} = 99\,\mathrm{nF}$