

Devoir surveillé n° 4

Mécanique & Électricité

- La durée de l'épreuve est de 3 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Problème 1 La physique de quelques sports des Jeux Olympiques

Les trois sous-parties de ce problème sont totalement indépendantes.

A Lancé de poids

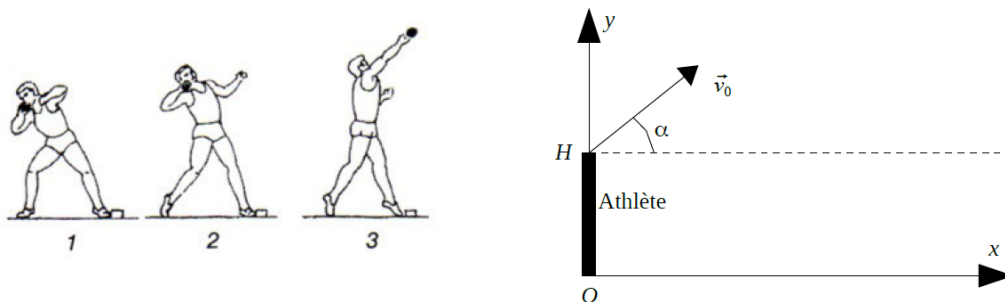
Pour éviter les confusions, nous appellerons « boulet » le projectile étudié afin de réserver le mot « poids » à la force de pesanteur.

Une athlète, de hauteur H bras levé, lance un boulet de masse m avec une vitesse initiale v_0 située dans le plan xOy , sous l'angle α par rapport au sol (figure ci-dessous). Le but de ce problème est d'étudier la modélisation d'un lancer puis de déterminer les conditions du « meilleur lancer ».

Pour les application numérique on prendra :

- $m = 4,0 \text{ kg}$
- $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$
- $g = 10 \text{ m s}^{-2}$
- $H = 2,0 \text{ m}$

Le record du monde féminin du lancer de poids est actuellement de 22,63 m.



Étude du lancer

On suppose que le boulet n'est soumis qu'à la force de pesanteur dès qu'il a quitté la main de l'athlète. Les conditions initiales du mouvement correspondent à l'instant et au point de l'espace où le boulet est lâché.

A.1 Déterminer la nature du mouvement du boulet selon l'axe (Ox) .

A.2 Au sommet S de la trajectoire, donner la valeur de la composante verticale de la vitesse du boulet, puis exprimer, en fonction de v_0 , g et α , la durée T_S nécessaire depuis le lancer pour que le boulet atteigne le sommet S .

On note (x_S, y_S) les coordonnées du sommet S de la trajectoire du boulet.

A.3 Établir l'expression de l'abscisse x_S en fonction de v_0 , g et α .

A.4 Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.

A.5 Calculer l'énergie mécanique du boulet à l'instant où il quitte la main de l'athlète. On supposera l'énergie potentielle du poids nulle au niveau du sol.

A.6 En utilisant les résultats des deux questions précédentes, déterminer l'expression de la coordonnée y_S en fonction de H , v_0 , g et α .

A.7 Application numérique : pour le cas $\alpha = 30^\circ$, calculer les valeurs numériques de T_S , x_S et y_S .

Détermination du meilleur lancer

On cherche à déterminer l'angle α_m qui est une valeur de l'angle α qui permet de réaliser le meilleur lancer pour une vitesse initiale v_0 fixée. On suppose α compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

A.8 À partir des équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$, exprimer l'équation $y(x)$ de la trajectoire du boulet.

A.9 Établir l'équation du second ordre régissant la coordonnée x_C du point de chute du boulet sur le sol. On mettra cette équation sous la forme : $Ax_C^2 + Bx_C + C = 0$, avec $A = \frac{g}{2v_0^2}$, B et C étant des paramètres ne dépendant que de H et α .

Une étude mathématique de cette équation permet d'exprimer la valeur maximale de x_C notée x_{Cm} qui correspond au meilleur lancer. On montre que :

$$x_{Cm} = \frac{2H \cos \alpha_m \sin \alpha_m}{\cos^2 \alpha_m - \sin^2 \alpha_m} \quad (1)$$

À partir de l'équation de la trajectoire, et en imposant les conditions des valeurs de x_{Cm} et α_m on peut établir la relation :

$$\tan^2 \alpha_m = \frac{1}{1 + aH} \quad (2)$$

avec

$$a = \frac{2g}{v_0^2} \quad (3)$$

A.10 Montrer par une analyse dimensionnelle que l'expression de l'équation (3) conduit bien à une dimension correcte pour cette grandeur.

A.11 Établir l'expression $x_{Cm} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gH}$. On pourra préalablement exprimer x_{Cm} en fonction de $\tan \alpha_m$ à partir de l'équation (1), puis utiliser les équations (2) et (3).

A.12 Étudier qualitativement l'influence de la taille de l'athlète sur le meilleur lancer.

A.13 Application numérique : calculer x_{Cm} et α_m à partir des données du problème. Commenter.

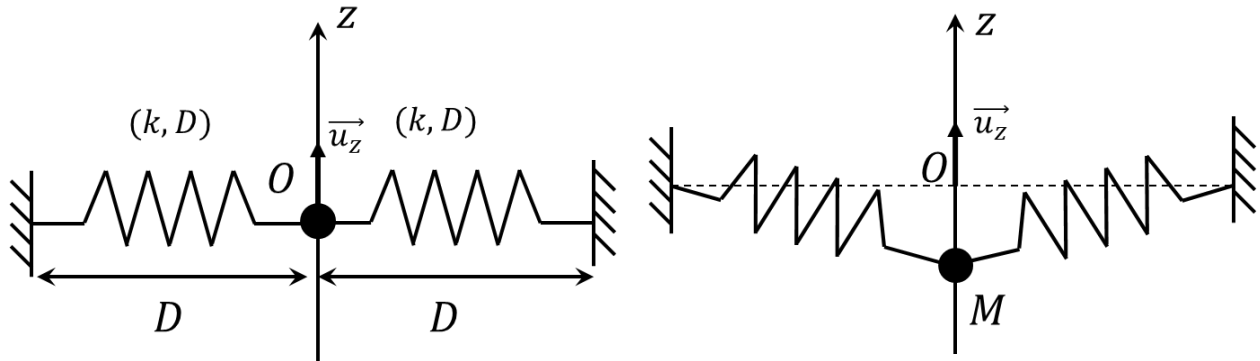
B Trampoline

Dans cette partie on souhaite étudier le mouvement d'un gymnaste sur un trampoline. Un trampoline est une surface élastique déformable sur laquelle le gymnaste saute, ce qui lui permet de rebondir (figure ci dessous).



Étude des mouvements possibles sur le trampoline

Dans cette partie, on assimile le gymnaste à un point matériel M de masse m . On définit un axe vertical ascendant (Oz) , avec O le centre du trampoline lorsque celui-ci est au repos (figure ci-dessous à gauche), et $\vec{u}_z$ le vecteur unitaire associé à cet axe. On suppose que le gymnaste ne se déplace que selon la verticale, si bien que $\vec{OM} = z\vec{u}_z$. Le trampoline agit sur le gymnaste lorsque $z < 0$ et son action est alors modélisée par deux ressorts transversaux de constantes de raideur k qui se déforment lorsque le gymnaste s'enfonce dans le trampoline (comme le montre la figure ci-dessous à droite). La longueur à vide de ces deux ressorts est la distance D , correspondant à la longueur des ressorts lorsque la surface est au repos. L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{u}_z$. On néglige tous les frottements.



Trampoline au repos (en l'absence du gymnaste). Trampoline tendu (en présence du gymnaste).

B.1 Montrer que l'expression de l'énergie potentielle élastique dont dérive la force de rappel d'un ressort de longueur ℓ , de longueur à vide ℓ_0 et de constante de raideur k s'écrit $E_{p1} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ lorsque l'origine de cette énergie potentielle est prise pour $\ell = \ell_0$.

B.2 En déduire l'expression de l'énergie potentielle élastique $E_{p,e}(z)$ due aux deux ressorts en fonction de k , D et z .

B.3 On suppose de petites déformations de la surface du trampoline : $|z| \ll D$. Montrer que sous cette hypothèse :

$$E_{p,e}(z) = \frac{kz^4}{4D^2}$$

On précise que $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ si $|x| \ll 1$.

B.4 Exprimer l'énergie potentielle totale $E_{p,tot}(z)$ du gymnaste. On distinguera les cas $z \geq 0$ et $z < 0$. L'origine de l'énergie potentielle totale sera prise au point O .

B.5 En déduire l'expression de la force verticale résultante $\vec{F} = F_z\vec{u}_z$ qui s'exerce sur le gymnaste pour $z \geq 0$ et pour $z < 0$.

B.6 Établir l'équation du mouvement du gymnaste lorsque celui-ci reste en contact avec le trampoline. Commenter.

Étude du mouvement par une approche énergétique.

B.7 Déterminer l'expression de la position d'équilibre z_{eq} . Cette position est-elle stable ou instable ? Un calcul est attendu.

B.8 Représenter graphiquement l'allure de $E_{p,tot}$ en fonction de z .

B.9 Justifier que l'énergie mécanique E_m du gymnaste se conserve.

B.10 Discuter qualitativement du mouvement du gymnaste si celui-ci possède une énergie mécanique négative. Faire de même s'il possède une énergie mécanique positive.

B.11 Jusqu'à quelle profondeur z_{lim} le gymnaste peut-il s'enfoncer dans le trampoline sans quitter ce dernier ? On exprimera z_{lim} en fonction de m , g , D et k .

B.12 Le gymnaste saute sur le trampoline depuis une hauteur $z = h$ sans vitesse initiale. Quelle est sa vitesse lorsqu'il se trouve à la position d'équilibre z_{eq} ? On exprimera v en fonction de m , g , D , k , h et z_{eq} .

B.13 Quelle est, en fonction des données, la période T des oscillations sinusoïdales du gymnaste au voisinage de la position d'équilibre z_{eq} ?

C Saut à la perche

Le saut à la perche est une épreuve d'athlétisme faisant partie des sauts. Elle consiste, après avoir effectué une course d'élan d'une cinquantaine de mètres, à s'aider d'une perche souple pour franchir sans la faire tomber une barre horizontale placée à plusieurs mètres de hauteur.

Le 7 aout 2024, lors des jeux olympiques de Paris 2024, Armand Duplantis a battu le record du monde de saut à la perche en franchissant une barre à 6,25 m (ce record du monde est désormais à 6,26 m depuis le 25 aout 2024).



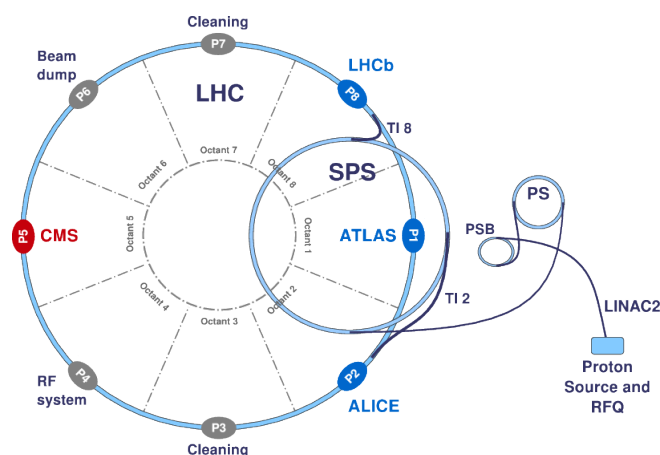
À l'aide d'une approche scientifique que vous détaillerez, estimer la vitesse atteinte par Armand Duplantis sur le sol avant qu'il ne s'élève grâce à sa perche. Commenter le résultat obtenu.

Le nombre de points accordé à cet exercice est non négligeable et prendra compte de la modélisation du problème (grandeurs pertinentes, hypothèses...), de la stratégie de résolution et de sa mise en œuvre ainsi que sur le regard critique porté sur le résultat obtenu et sur la démarche suivie.

Problème 2 Accélération de protons dans un Linac

Le Grand Collisionneur de Hadrons (Large Hadron Collider ou LHC) est l'accélérateur de particules le plus puissant au monde, situé dans un anneau de 27 km de circonférence et enterré à 100 m sous terre à la frontière franco-suisse, près de Genève.

Le LHC est formé d'une succession d'accélérateurs, d'énergies toujours croissantes. Chaque accélérateur injecte un faisceau de particules dans la machine suivante, qui prend le relais pour porter ce faisceau à une énergie encore plus élevée, et ainsi de suite. L'énergie des particules ainsi accélérées est transformée au moment du choc en une myriade de particules exotiques parmi lesquelles le boson de Higgs observé la première fois en juillet 2012.



Site du CERN, dans les environs de Genève. Le grand cercle représente la position du tunnel du LHC.

On se propose dans ce problème d'étudier le fonctionnement du Linac, l'un des accélérateurs du LHC en étudiant le mouvement d'un proton dans le cadre de la mécanique classique. On rappelle quelques constantes physiques nécessaires :

Masse du proton	$m_p = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Charge électrique élémentaire	$e = 1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$
Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
Unités d'énergie	$1 \text{ eV} = 1,60 \times 10^{-19} \text{ J}$

A Particule dans un champ électrique stationnaire et uniforme

A.1 Quelle est l'expression de la force électrique $\vec{F}_e$ subie par un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ électrique $\vec{E}$?

A.2 Montrer que l'on peut négliger le poids du proton devant la force électrique générée par un champ $E = 100 \text{ kV/m}$. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 10 \text{ m s}^{-2}$.

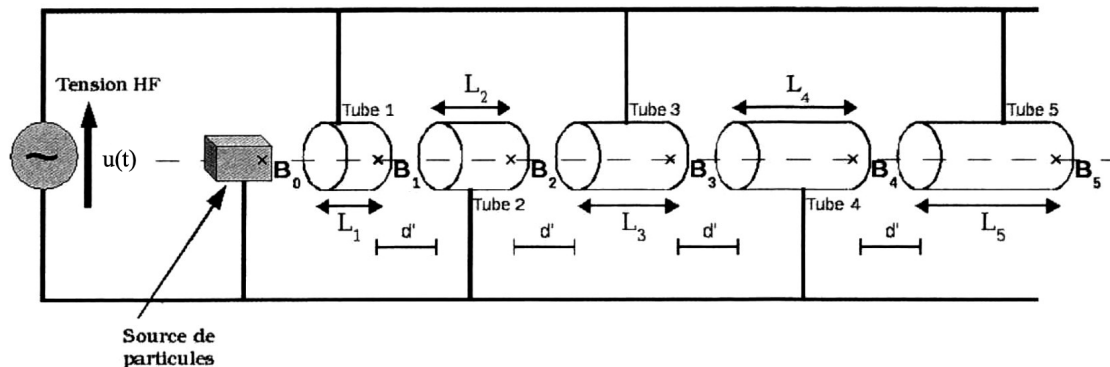
A.3 La zone de l'espace où règne le champ $\vec{E}$ stationnaire et uniforme a une longueur d . Ce champ est créé par deux armatures métalliques planes reliées à un générateur de haute tension qui impose une différence de potentiel positive $U = V_1 - V_2$ entre les deux plaques. Représenter sur un même schéma les armatures du condensateur avec leurs potentiels V_1 et V_2 , le champ $\vec{E}$ et la tension U , de manière à ce que le mouvement du proton soit rectiligne et accéléré de $x = 0$ vers $x = d$.

A.4 Sachant que le champ $\vec{E}$ et le potentiel V vérifient la relation $\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -dV$ ou $\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V$, montrer que la force électrique $\vec{F}_e$ appliquée à une charge q est conservative et déterminer l'expression de l'énergie potentielle de la charge q dans un champ $\vec{E}$ en fonction de q et V .

A.5 Déterminer l'expression de la variation $\Delta E_{c,E \rightarrow S}$ de l'énergie cinétique du proton entre l'entrée (E) et la sortie (S) de la zone d'accélération en fonction, entre autres, de U .

B Accélérateur linéaire de protons de Wilderöe

Pour atteindre des hautes vitesses, on utilise des accélérateurs linéaires (Linac) fonctionnant avec un générateur de tension $u(t)$ sinusoïdale à haute fréquence (HF) (figure ci-dessous).



Les protons, produits au niveau de la source de particules, traversent des tubes de cuivre reliés à l'une ou à l'autre des bornes du générateur délivrant une tension $u(t) = -U_{\max} \sin(\omega t + \phi)$ avec $U_{\max}$ positif et $0 < \phi < \pi$. On note T la période du signal.

Les tubes sont distants de d' . À l'intérieur de chaque tube, le champ électrique est nul ; il est uniforme entre deux tubes consécutifs. On supposera que d' est suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que le proton perçoit un champ électrique indépendant du temps lorsqu'il passe entre deux tubes consécutifs. Cela revient à considérer que la durée de chaque phase d'accélération est négligeable devant la durée du parcours dans les tubes.

Le point B_0 est placé à la sortie de la source, les différents points B_i sont placés à la sortie des tubes i pour $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

Les seules forces considérées sont les forces électriques.

B.1 Représenter sur votre copie les vecteurs champs électriques $\vec{E}_i$ aux points B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 et B_5 à $t = 0$.

B.2 Faire de même à $t = \frac{T}{2}$.

B.3 À quelle condition sur le champ électrique les protons sont-ils accélérés à chaque passage d'un tube à l'autre ?

On note v_0 la norme du vecteur vitesse d'un proton en B_0 et v_i celles aux points B_i pour $i \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

B.4 Déterminer l'expression de la longueur L_i du tube i en fonction de v_i et T pour que les protons soient toujours accélérés entre les tubes.

On considère le cas d'un proton situé en B_0 à $t = 0$.

B.5 Préciser la valeur de ϕ permettant d'avoir une accélération maximale entre chaque tube. On considérera cette valeur de ϕ pour la suite du problème.

B.6 Représenter en fonction du temps, l'allure de la norme du vecteur vitesse du proton entre les points B_0 et B_5 .

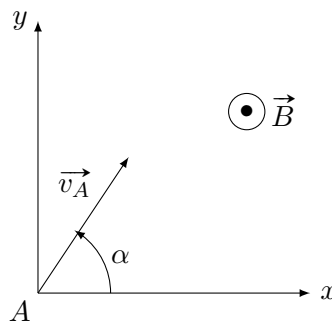
B.7 Déterminer la vitesse v_5 du proton en B_5 à la sortie du tube 5 sachant que $v_0 = 5,00 \times 10^5 \text{ m s}^{-1}$ et que $U_{\text{max}} = 500 \text{ kV}$.

B.8 Déterminer le nombre de tubes nécessaires si on souhaite accélérer le proton à $18,5 \text{ MeV}$ à la sortie du Linac.

C Synchrotron à protons

Les protons ainsi accélérés sont injectés dans un booster pour être à nouveau accélérés avant d'entrer dans le Synchrotron à Protons (PS) du LHC.

On considère un proton injecté dans le synchrotron où règne un champ magnétique stationnaire et uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$ avec $B > 0$. À $t = 0$, le proton est en A et sa vitesse $\vec{v}_A$ est perpendiculaire au champ magnétique (figure ci-dessous).



Vitesse initiale du proton dans le champ magnétique

C.1 Quelle est l'expression de la force magnétique $\vec{F}_m$ subie par un proton plongé dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\vec{B}$? Pour la suite, on considère que le proton n'est soumis qu'à cette force.

C.2 Montrer que le mouvement du proton est uniforme.

C.3 Montrer que la trajectoire du proton est plane.

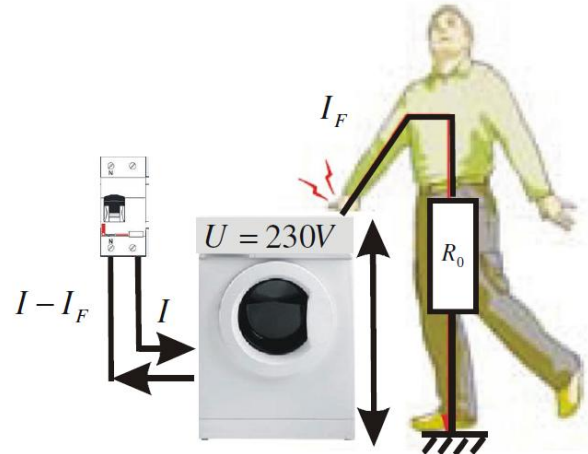
C.4 On suppose la trajectoire circulaire de centre C . Déterminer le rayon de la trajectoire en fonction des données.

C.5 Reproduire la figure ci-dessus sur votre copie. Y représenter la force magnétique $\vec{F}_m$ appliquée au proton à $t = 0$ ainsi que l'allure du début de la trajectoire.

Problème 3 Étude de la protection d'une installation

La carcasse métallique d'un appareil d'utilisation domestique comporte une « phase » à 230 V et un « neutre » à 0 V destinés au circuit d'alimentation. La carcasse est également reliée par un fil à la « terre » afin de protéger l'utilisateur. En cas de défaut d'isolement de l'appareil, l'utilisateur au contact de la carcasse est soumis au potentiel du réseau ; sa protection n'est pas assurée. L'absence de « terre » sur l'appareil d'utilisation ne permet pas l'écoulement du courant de défaut : seul un disjoncteur différentiel de 30 mA permettra à la personne d'éviter l'électrocution.

Si une installation monophasée présente un défaut d'isolement, le courant d'intensité efficace I qui entre dans la machine est différent du courant qui en ressort, d'intensité efficace $I - I_F$. Le courant de fuite d'intensité efficace I_F passe à la terre via la personne dont la résistance électrique globale est notée R_0 (figure 2). Le disjoncteur coupe le courant si l'intensité efficace atteint la **valeur seuil 30 mA, valeur pour laquelle il y a risque de téτανisation des muscles**.



Courant de fuite en l'absence de « terre » sur l'appareil

On assimilera dans cette exercice que **les grandeurs efficaces associées à des signaux variables sont assimilées à des grandeurs constantes équivalentes**. On peut donc considérer que les différentes grandeurs sont indépendantes du temps.

Q1. Quelle doit être la valeur maximale de la résistance R_0 pour qu'il y ait coupure de courant ?

On peut modéliser le corps humain selon le schéma électrique représenté sur la figure ci-contre.

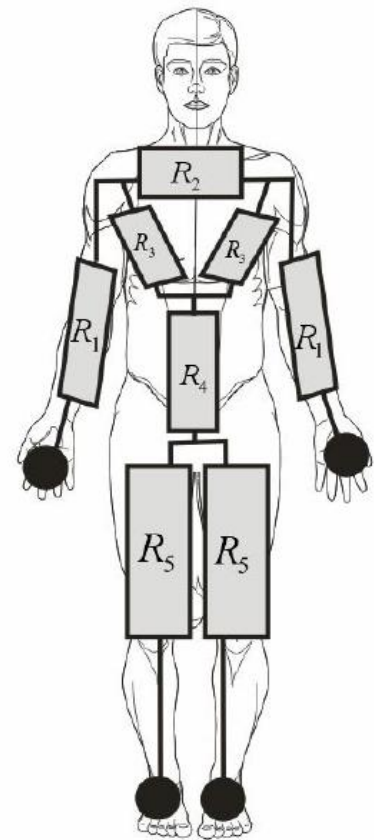
Données : $R_1 = 460 \Omega$, $R_2 = 80 \Omega$, $R_3 = 125 \Omega$, $R_4 = 15 \Omega$, $R_5 = 840 \Omega$.

Q2. Comment peut-on justifier la valeur élevée des résistances des bras et des jambes (R_1 et R_5) et la faible valeur de R_4 ?

Q3. Déterminer l'intensité efficace du courant traversant le corps humain et conclure sur la dangerosité de l'expérience lorsque :

- les deux mains tiennent les deux pôles d'une prise 230 V et les chaussures sont isolantes ;
- une main tient une phase 230 V et les pieds nus sont par terre ;
- les deux mains tiennent les rails d'un train de modélisme (16 V)

Q4. Pourquoi les oiseaux peuvent-ils se poser sur les fils haute tension sans s'électrocuter ?



Modèle électrique du corps humain