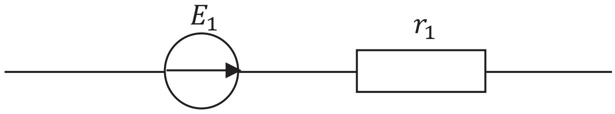
Problème 1: Recharge d'une batterie au plomb

1) et 2) La caractéristique tension-courant de l'accumulateur est linéaire : $U = E_1 - r_1.I$. On peut donc modéliser l'accumulateur par une association en série d'une source idéale de tension (de f.é.m. E_1) et d'un conducteur ohmique de résistance r_1 :

Modélisation d'un accumulateur :



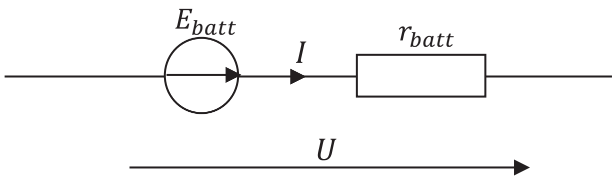
3) Mesures : pour $I = 0$, $U = E_1 = 2{,}0\ V$

La résistance r_1 est donnée par la pente de la caractéristique : $r_1 = \left|\frac{\Delta U}{\Delta I}\right| = \left|\frac{1{,}9-(2{,}1)}{2{,}0-(-2{,}0)}\right| = 5{,}0.10^{-2}\ \Omega$

4) En appliquant la loi des mailles, on peut dire que $E_{\text{batt}} = E_1$ si on place les six accumulateurs en dérivation alors que $E_{\text{batt}} = 6.E_1$ si on place les accumulateurs en série. Pour que la tension soit maximale, il faut donc placer les **six accumulateurs en série**.

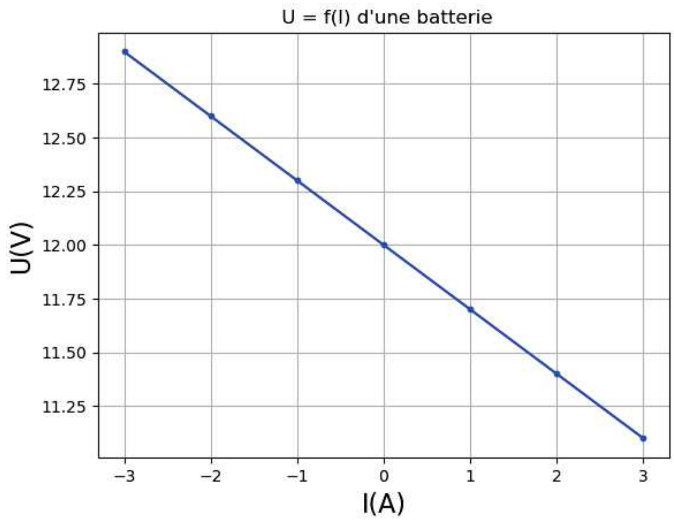
5) Si on place six accumulateurs en série, ceci est équivalent à placer six générateurs de Thévenin $(E_1; r_1)$ en série. La f.é.m. équivalente est $\boldsymbol{E_{\text{batt}} = 6.E_1}$ et la résistance équivalente $\boldsymbol{r_{\text{batt}} = 6.r_1}$.

Modélisation d'une batterie :



En convention générateur : $U = E_{\text{batt}} - r_{\text{batt}}.I$ A.N. : $E_{\text{batt}} = 12\ V$ et $r_{\text{batt}} = 0{,}30\ \Omega$.

6) Caractéristique tension-courant d'une batterie (en convention générateur) :



7) Dans un circuit, un dipôle est générateur s'il fournit de l'énergie, récepteur s'il reçoit de l'énergie.

En convention générateur, la puissance d'une batterie est :

$$\mathcal{P} = U.I = (E_{batt} - r_{batt}.I).I = E_{batt}.I - r_{batt}.I^2$$

On vérifie que :

- $\mathcal{P} \geq 0$ pour $I \in [0, I_{CC} = E_{batt}/r_{batt}]$: la batterie est génératrice
- $\mathcal{P} < 0$ pour $I < 0$: la batterie est réceptrice.

8) Au début de la charge, $e_{\text{batt}}(0) = 0$ la batterie est donc équivalente à un conducteur ohmique de résistance $r_{\text{batt}} = 0{,}30\ \Omega$. On note $R_{éq}$ la résistance équivalente du circuit :

$$R_{éq} = R_1 + \frac{R_2.r_{\text{batt}}}{R_2 + r_{\text{batt}}}$$

En appliquant la loi des mailles, on établit que :

$$E_0 = R_{éq}.i_1$$

Soit :

$$i_1 = \frac{E_0}{R_{éq}} = \frac{E_0}{R_1 + \frac{R_2.r_{\text{batt}}}{R_2 + r_{\text{batt}}}} = \frac{E_0.(R_2 + r_{\text{batt}})}{\mathrm{r_{batt}.R_1 + r_{batt}.R_2 + R_1.R_2}}$$

On reconnaissant un diviseur de courant, on établit que :

$$i_{\text{batt}} = i_0 = \frac{R_2.i_1}{R_2 + r_{\text{batt}}}$$

En explicitant :

$$\boxed{i_0 = \frac{E_0.R_2}{\mathrm{r_{batt}.R_1 + r_{batt}.R_2 + R_1.R_2}}}$$

Rq. : On peut noter que cette expression est similaire à celle donnée dans l'énoncé (question 10) pour $e_{\text{batt}} = 0$.

9) On note i_2 l'intensité du courant qui circule dans R_2 (en convention récepteur). Appliquons les lois de Kirchhoff au circuit :

$$\boxed{\begin{array}{l} i_1 = i_2 + i_{\text{batt}} \\ E_0 - R_1.i_1 = R_2.i_2 = e_{\text{batt}} + r_{\text{batt}}.i_{\text{batt}} \end{array}}$$

10) On en déduit que :

$$E_0 - R_1.(i_2 + i_{\text{batt}}) = R_2.i_2$$

$$i_2 = \frac{E_0 - R_1.i_{\text{batt}}}{R_1 + R_2}$$

Sachant que :

$$R_2.i_2 = e_{\text{batt}} + r_{\text{batt}}.i_{\text{batt}}$$

En explicitant i_2 :

$$R_2.\left(\frac{E_0 - R_1.i_{\text{batt}}}{R_1 + R_2}\right) = e_{\text{batt}} + r_{\text{batt}}.i_{\text{batt}}$$

$$R_2.E_0 - R_1.R_2.i_{\text{batt}} = (R_1 + R_2).e_{\text{batt}} + (R_1 + R_2).r_{\text{batt}}.i_{\text{batt}}$$

On établit que :

$$\boxed{i_{\text{batt}} = \frac{R_2.E_0 - (R_1 + R_2).e_{\text{batt}}}{\mathrm{r_{batt}.R_1 + r_{batt}.R_2 + R_1.R_2}}}$$

Conforme à la formule donnée dans l'énoncé.

11) La batterie est composée de cellules électrochimiques. Par définition, la batterie est en charge tant qu'elle « reçoit » des charges. Dès que $\boldsymbol{i_{\mathrm{batt}} = 0}$ on peut considérer que la batterie est chargée.

12) A partir de l'expression établie précédemment : $i_{\mathrm{batt}} = 0$ pour :

$$R_2.E_0 - (R_1 + R_2).e_{\mathrm{batt}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{e_{\mathrm{batt}} = \frac{R_2.E_0}{(R_1 + R_2)}}$$

A.N. : $e_{\mathrm{batt}} = 10\ V$

13) On considère qu'un accumulateur est chargé à $100\ \%$ quand sa f.é.m. est $E_1 = 2{,}5\ V$ (cf document fourni dans l'énoncé). Pour une batterie, cela correspond à $e_{\mathrm{batt.max}} = 6.E_1 = 15\ V$.

14) Déterminons R_2 pour que la batterie soit chargée à $100\ \%$:

$$e_{\mathrm{batt.max}} = \frac{R_2.E_0}{(R_1 + R_2)}$$

On établit que :

$$\boxed{R_2 = \frac{R_1.e_{\mathrm{batt.max}}}{E_0 - e_{\mathrm{batt.max}}}}$$

A.N. : $R_2 = 45\ \Omega$

Problème 2 : Intensités et tensions dans un circuit

Grâce à la loi des mailles et d'après la continuité de la tension aux bornes du condensateur, on obtient: $u(0^+) = E - u_C(0^+) = E$.

D'après la loi des noeuds, $i_C(0^+) = i_L(0^+) + i_{R_2}(0^+) - i_{R_1}(0^+)$, avec $i_L(0^+) = 0$ par continuité du courant dans l'inductance, $i_{R_1}(0^+) = \dfrac{u_C(0^+)}{R_1} = 0$ et $i_{R_2}(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{R_2} = \dfrac{E}{R_2}$. On a donc $i_C(0^+) = \dfrac{E}{R_2}$.

En régime continu l'inductance se comporte comme un fil et on a donc $u(t \to +\infty) = 0$.

On a alors $i_{R_2}(+\infty) = 0$ et d'après la loi des mailles $u_C(+\infty) = E$. On en tire $i_{R_1}(+\infty) = \dfrac{E}{R_1}$.

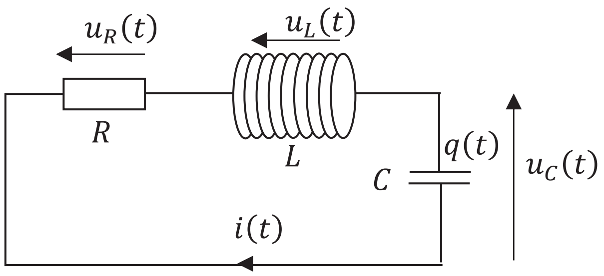
D'autre part le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et $i_C(t \to +\infty) = 0$.

D'après la loi des noeuds on a alors: $i_L(+\infty) = \dfrac{E}{R_1}$.

	C	$R_1 = R$	L	$R_2 = R$
$t = 0^+$	$i_C(0^+) = \dfrac{E}{R_2}$ $u_C(0^+) = 0$	$i_{R_1}(0^+) = 0$ $u_{R_1}(0^+) = 0$	$i_L(0^+) = 0$ $u_L(0^+) = E$	$i_{R_2}(0^+) = \dfrac{E}{R_2}$ $u_{R_2}(0^+) = E$
$t \to +\infty$	$i_C(+\infty) = 0$ $u_C(+\infty) = E$	$i_{R_1}(+\infty) = \dfrac{E}{R_1}$ $u_{R_1}(+\infty) = E$	$i_L(+\infty) = \dfrac{E}{R_1}$ $u_L(+\infty) = 0$	$i_{R_2}(+\infty) = 0$ $u_{R_2}(+\infty) = 0$

Problème 3 : Analogies électromécaniques

1) Schéma électrique du montage :



2) Relation entre $q(t)$ et $i(t)$:

$$\boxed{i(t) = \frac{dq(t)}{dt}}$$

On en déduit que :

$$u_R(t) = R.i(t) = R.\left(\frac{dq(t)}{dt}\right)$$

Sachant qu'en convention récepteur :

$$u_L(t) = L.\left(\frac{di(t)}{dt}\right) \text{ on établit également que : } u_L(t) = L.\left(\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right)$$

Tension aux bornes du condensateur :

$$u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$$

Bilan :

$$\boxed{u_R(t) = R.\left(\frac{dq(t)}{dt}\right) \quad ; \quad u_C(t) = \frac{q(t)}{C} \quad ; \quad u_L(t) = L.\left(\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right)}$$

3) Appliquons la loi des mailles :

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$$

En explicitant :

$$L.\left(\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right) + R.\left(\frac{dq(t)}{dt}\right) + \frac{q(t)}{C} = 0$$

En divisant par L, on établit l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$:

$$\boxed{\left(\frac{d^2q(t)}{dt^2}\right) + \frac{R}{L}.\left(\frac{dq(t)}{dt}\right) + \frac{q(t)}{L.C} = 0}$$

Si on pose que :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L.\omega_0}{R}$$

On vérifie que :

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dq(t)}{dt} + \omega_0^2.q(t) = 0$$

Avec :

- ω_0 : pulsation propre du circuit (homogène à l'inverse d'un temps). Unité : $\mathrm{rad.s^{-1}}$. La pulsation propre correspond à la pulsation des oscillations de la charge dans le circuit en l'absence d'amortissement ($R \to 0$).
- Q est le facteur de qualité du circuit. Par définition, le facteur de qualité est sans dimension donc sans unité. Le facteur de qualité permet d'apprécier le caractère dissipatif du circuit… plus la résistance est faible, plus le facteur de qualité est élevé.

4) Equation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2.r = 0$

Discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4.\omega_0^2 = \omega_0^2.\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Le régime d'évolution est pseudopériodique si le discriminant $\Delta < 0$, ceci implique que :

$$\boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

Les solutions de l'équation caractéristique sont :

$$\boxed{\begin{aligned} r_+ &= -\frac{\omega_0}{2.Q} + j.\omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}} \\ r_- &= -\frac{\omega_0}{2.Q} - j.\omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}} \end{aligned}}$$

Soit Ω la pseudopériode :

$$\Omega = \omega_0.\sqrt{1 - \frac{1}{4.Q^2}}$$

La solution de l'équation différentielle est du type :

$$q(t) = e^{-\frac{\omega_0.t}{2.Q}}.(A.\cos(\Omega.t) + B.\sin(\Omega.t))$$

où A et B sont des constantes définies par les conditions initiales or nous savons qu'il n'y a pas de discontinuité de la tension (respectivement de la charge) aux bornes d'un condensateur, ni de discontinuité du courant dans une bobine.

$$\boxed{\begin{array}{l} q(0^-) = q(0^+) = q_0 \\ i(0^-) = i(0^+) = 0 \end{array}}$$

On en déduit que :

$$q(0) = q_0 \quad \text{et que} \quad \left(\frac{dq(t)}{dt}\right)_{t=0} = 0$$

En explicitant :

$$\begin{cases} q(0) = A = q_0 \\ \left(\frac{dq(t)}{dt}\right)_{t=0} = -\frac{\omega_0.A}{2.Q} + B.\Omega = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$A = q_0 \quad et \quad B = q_0.\left(\frac{1}{2.Q}\right)\left(\frac{\omega_0}{\Omega}\right) = q_0.\left(\frac{1}{2.Q}\right)\left(\frac{\omega_0}{\omega_0.\sqrt{1-\frac{1}{4.Q^2}}}\right) = \frac{q_0}{\sqrt{4.Q^2-1}}$$

Soit l'expression de $q(t)$:

$$\boxed{q(t) = q_0.e^{-\frac{\omega_0.t}{2.Q}}.\left(\cos\left(\omega_0.\sqrt{1-\frac{1}{4.Q^2}}.t\right) + \frac{1}{\sqrt{4.Q^2-1}}\sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\frac{1}{4.Q^2}}.t\right)\right)}$$

La fonction $q(t)$ est une fonction de type sinusoïdal dont l'amplitude subit une décroissance exponentielle au cours du temps, ceci est caractéristique d'une évolution pseudopériodique.

5) On note T la pseudopériode définie par :

$$T = \frac{2.\pi}{\Omega}$$

En explicitant :

$$\boxed{T = \frac{2.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\frac{1}{4.Q^2}}}}$$

6) Décrément logarithmique :

$$\delta = \ln\left(\frac{q(t)}{q(t+T)}\right)$$

Posons que $q(t)$ est du type :

$$q(t) = D.e^{-\frac{\omega_0.t}{2.Q}}.\cos(\Omega.t + \varphi)$$

… forme équivalente à celle établie précédemment, mais plus commode pour expliciter δ :

$$\delta = \ln\left(\frac{D.e^{-\frac{\omega_0.t}{2.Q}}.\cos(\Omega.t+\varphi)}{D.e^{-\frac{\omega_0.t}{2.Q}}.e^{-\frac{\omega_0.T}{2.Q}}\cos(\Omega.t+\Omega.T+\varphi)}\right) = \ln\left(\frac{\cos(\Omega.t+\varphi)}{e^{-\frac{\omega_0.T}{2.Q}}\cos(\Omega.t+2.\pi+\varphi)}\right) = \ln\left(e^{\frac{\omega_0.T}{2.Q}}\right)$$

On établit ainsi que :

$$\boxed{\delta = \frac{\omega_0 . T}{2. Q}}$$

On en déduit l'expression de δ en fonction de Q :

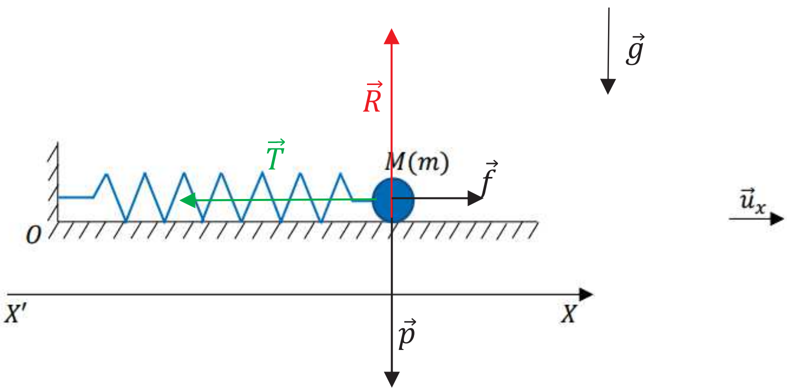
$$\delta = \frac{\pi}{Q\sqrt{1 - \frac{1}{4. Q^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - \frac{1}{4}}}$$

On peut noter que si $Q^2 \gg 1$ alors :

$$\boxed{\delta = \frac{\pi}{Q}}$$

7) Pour $\Delta = 0$ (soit $Q = 1/2$), le régime d'évolution est **critique** et pour $\Delta > 0$ (soit $Q < 1/2$) l'évolution est **apériodique**.

8) Schéma du point matériel $M(m)$:



Bilan des forces s'exerçant sur M :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{p} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f}$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à M dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$m. \vec{a}(M) = \vec{p} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f}$$

En notant que $\vec{p} + \vec{R} = \vec{0}$, en explicitant les forces :

$$\vec{T} = -k. (l(t) - l_0). \vec{u}_x = -k. x(t). \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{f} = -\lambda. \dot{x}(t). \vec{u}_x$$

En projetant sur $\vec{u}_x$ on établit :

$$m. \ddot{x}(t) = -k. x(t) - \lambda. \dot{x}(t)$$

On établit l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$:

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{\lambda}{m}. \dot{x}(t) + \frac{k}{m}. x(t) = 0}$$

9) Cette équation différentielle est similaire à :

$$\ddot{q}(t) + \frac{R}{L}. \dot{q}(t) + \frac{q(t)}{L. C} = 0$$

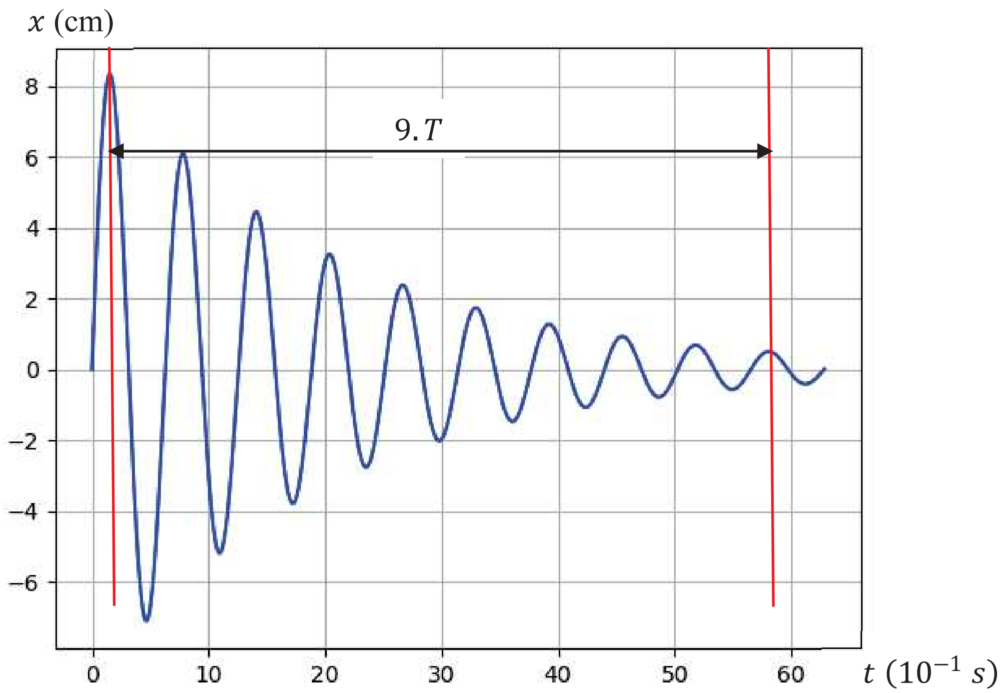
On établit les analogies suivantes :

Electricité	$q(t)$	$i(t)$	R	L	C
Mécanique	$x(t)$	$\dot{x}(t)$	λ	m	$1/k$

10) Analogue de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle élastique :

Mécanique	$E_C = \frac{1}{2} m.v^2$	$E_{PE} = \frac{1}{2} k.x^2$
Electricité	$E_{Bob} = \frac{1}{2} L.i^2$	$E_{Cond} = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C.u_C^2$

11) A partir du document fourni, on détermine :



- Position initiale : $x_0 = 0$
- Vitesse initiale (fixée par la pente à l'origine des temps) : $v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 7\ m.s^{-1}$
- Pseudopériode (mesure sur 9 pseudopériodes) : $T = 0{,}63\ s$
- Décrément logarithmique : $\delta = \frac{1}{9} \ln\left(\frac{8{,}2}{0{,}3}\right) = 0{,}37$

12) En faisant l'hypothèse que $Q^2 \gg 1$: $\delta = \pi/Q$ on établit que $Q = 8{,}5$. Avec $T = T_0$: $\omega_0 = 2.\pi/T_0 = 10\ \text{rad.s}^{-1}$

13) La valeur de la masse est fournie dans l'énoncé ($m = 250\ g = 0{,}25\ kg$). Par analogie :

$$Q = \frac{m.\omega_0}{\lambda}$$

On établit que :

$$\lambda = \frac{m.\omega_0}{Q} = 0{,}29\ kg.s^{-1}$$

Avec :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

On établit que :

$$k = m.\omega_0^2 = 25\ N.m^{-1}$$

Bilan :

$$\boxed{m = 0{,}25\ kg \quad ; \quad \lambda = 0{,}29\ kg.s^{-1} \quad \text{et} \quad k = 25\ N.m^{-1}}$$

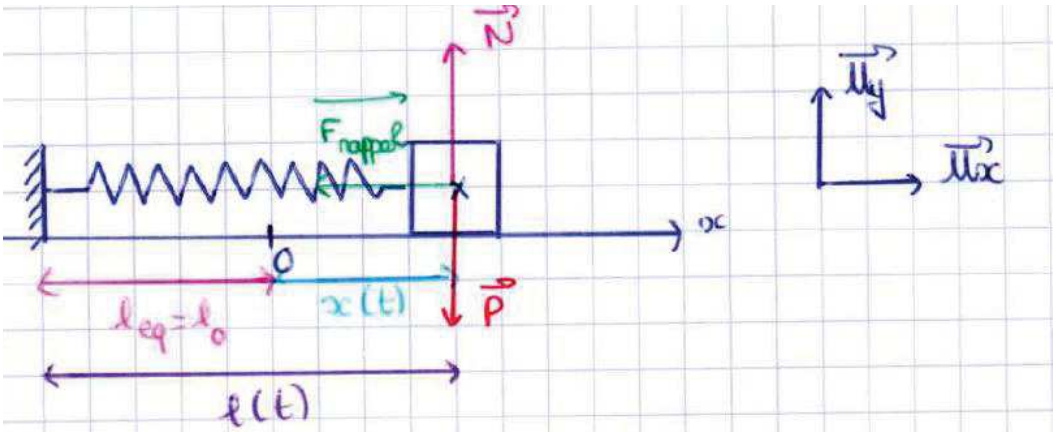
Problème n°4 : Modélisation du mouvement d'une plateforme en mer

Partie A : Ressort sans amortissement et sans excitation.

1) Système : $\{plateforme\ de\ masse\ m\}$. Référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = -mg\overrightarrow{U_y}$
- Réaction du support : $\vec{N} = N\overrightarrow{U_y}$
- Force de rappel élastique : $\overrightarrow{F_{rappel}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{U_x} = -k(\ell_0 + \ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{U_x} = -kx(t)\overrightarrow{U_x}$



Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{rappel}} = m\vec{a}$$

On projette selon $\overrightarrow{U_x}$:

$$-kx(t) = m\ddot{x}(t)$$

$$\boxed{m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0}$$

2) On met sous forme canonique :

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

Je reconnais l'équation d'un oscillateur harmonique avec :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Solution de l'équation homogène :

$$x_h(t) = A.\cos(\omega_0 t) + B.\sin(\omega_0 t)$$

Solution particulière :

$$x_p = cste = 0$$

Solution générale :

$$x(t) = A.\cos(\omega_0 t) + B.\sin(\omega_0 t)$$

Détermination des constantes à l'aide des CI :

$$x(t=0) = x_0 = A$$

$$x(t) = x_0 cos(\omega_0 t) + B.sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = -x_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B.\omega_0 cos(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = B\omega_0 \Leftrightarrow B = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$$

$$\boxed{x(t) = x_0.cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{\omega_0}.\sin(\omega_0 t)}$$

3) On sait que : $R_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$

$$\boxed{R_0 = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$x(t) = R_0.cos(\omega_0 t - \phi_0)$$

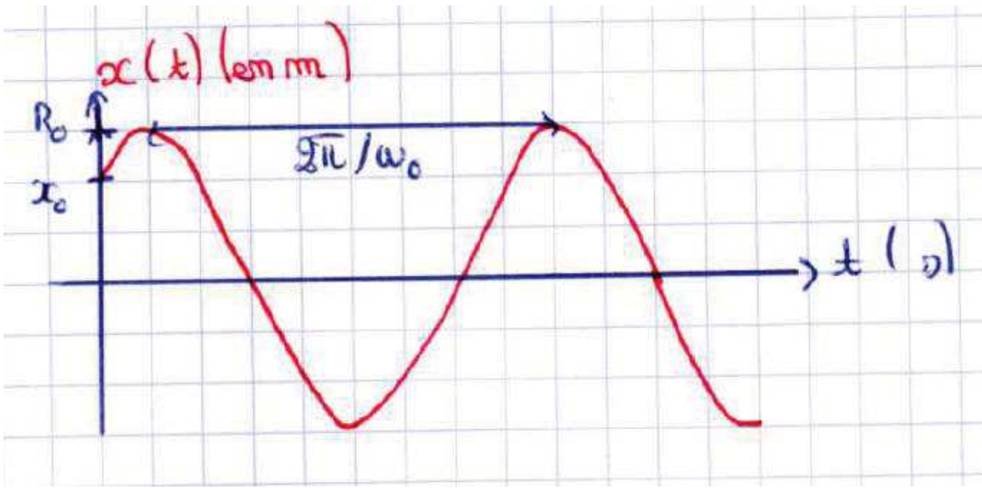
$$x(t=0) = x_0 = R_0.\cos(-\phi_0) = R_0.cos(\phi_0)$$

$$\dot{x}(t) = -R_0.\omega_0.sin(\omega_0 t - \phi_0)$$

$$\dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = -R_0.\omega_0.sin(-\phi_0) = R_0.\omega_0.sin(\phi_0)$$

$$\boxed{\tan(\phi_0) = \frac{\dot{x}_0}{\omega_0 x_0}}$$

4)



5) On calcule $E(t)$:

$$E(t) = K(t) + U(t)$$

$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2}mx^2(t) + \frac{1}{2}kx^2(t)$$

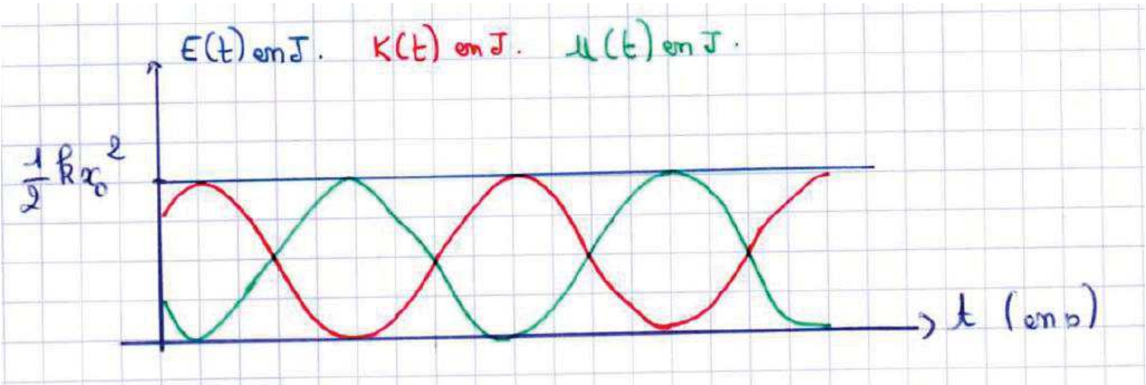
$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2}m[-R_0.\omega_0.sin(\omega_0 t - \phi_0)]^2 + \frac{1}{2}k[R_0.cos(\omega_0 t - \phi_0)]^2$$

$$\Leftrightarrow E(t) = \frac{1}{2}m.R_0^2.\frac{k}{m}.sin^{2(\omega_0 t - \phi_0)} + \frac{1}{2}k.R_0^2.cos^2(\omega_0 t - \phi_0)$$

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2}kR_0^2}$$

<u>**Commentaire :**</u> $E(t)$ est en réalité une constante. C'est normal, il n'y a pas de perte d'énergie puisque les frottements sont négligés.

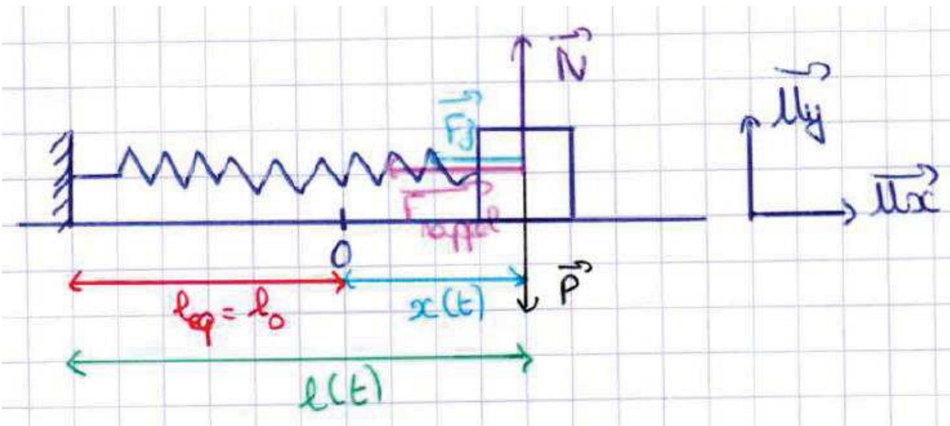
6)



Partie B : Ressort avec amortissement et sans excitation.

7) Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = -mg\overrightarrow{U_y}$
- Réaction du support : $\vec{N} = N\overrightarrow{U_y}$
- Force de rappel élastique : $\overrightarrow{F_{rappel}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{U_x} = -k(\ell_0 + \ell(t) - \ell_0)\overrightarrow{U_x} = -kx(t)\overrightarrow{U_x}$
- Force de frottements : $\overrightarrow{F_f} = -\gamma\dot{x}(t)\overrightarrow{U_x}$



Principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{P} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{rappel}} + \vec{F_f} = m\vec{a}$$

On projette selon $\overrightarrow{U_x}$:

$$-kx(t) - \gamma\dot{x}(t) = m\ddot{x}(t)$$

On identifie :

$$\boxed{\ddot{x}(t) + \frac{\gamma}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0}$$

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\frac{\gamma}{m} = \omega_0.2.\zeta \Leftrightarrow \zeta = \frac{\gamma}{m.2.\omega_0}$$

$$\boxed{\zeta = \frac{\gamma}{2\sqrt{km}}}$$

8) On a un régime pseudo périodique si : $\Delta < 0$

$$\Leftrightarrow (2\zeta\omega_0)^2 - 4\omega_0^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4\zeta^{2\omega_0^2} - 4\omega_0^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 4\omega_0^2(\zeta^2 - 1) < 0$$

$$\Leftrightarrow \zeta^2 - 1 < 0$$

$$\boxed{\zeta < 1}$$

$$x(t = 0) = x_0$$

$$\boxed{A_1 = x_0}$$

$$\dot{x}(t) = -\zeta\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}[x_0.\cos(\omega_1 t) + B_1.sin(\omega_1 t)] + e^{-\zeta\omega_0 t}.[-x_0.\omega_1.\sin(\omega_1 t) + B_1.\omega_1.\cos(\omega_0 t)]$$

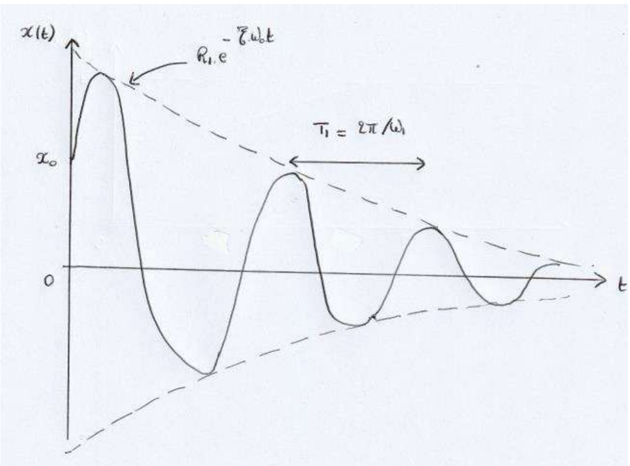
$$\dot{x}(t = 0) = \dot{x}_0 \Leftrightarrow -\zeta\omega_0 x_0 + B_1\omega_1 = \dot{x}_0$$

$$\boxed{B_1 = \frac{\dot{x}_0 + \zeta\omega_0 x_0}{\omega_1}}$$

9) De la même manière que dans la question 3) on établit que :

$$R_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} \quad \text{et} \quad \tan\varphi_1 = \frac{B_1}{A_1}$$

10)



11) Nous savons que $E_m(t) = \frac{1}{2}k.x(t)^2 + \frac{1}{2}m.\dot{x}(t)^2$ avec :

$$x(t) = R_1.e^{-\zeta.\omega_0.t}.\cos(\omega_1.t - \varphi_1)$$

$$\dot{x}(t) = -\zeta.\omega_0.R_1.e^{-\zeta.\omega_0.t}.\cos(\omega_1.t - \varphi_1) - \omega_1.R_1.e^{-\zeta.\omega_0.t}.\sin(\omega_1.t - \varphi_1)$$

Et :

$$\dot{x}(t)^2 = \left(-\zeta.\omega_0.R_1.e^{-\zeta.\omega_0.t}.\cos(\omega_1.t - \varphi_1) - \omega_1.R_1.e^{-\zeta.\omega_0.t}.\sin(\omega_1.t - \varphi_1)\right)^2$$
$$= \omega_1.R_1.e^{-\zeta.\omega_0.t}.\sin(\omega_1.t - \varphi_1) = {\omega_1}^2.{R_1}^2.e^{-2.\zeta.\omega_0.t}.\sin^2(\omega_1.t - \varphi_1)$$

dans l'hypothèse que $\zeta^2 \ll 1$.

On en déduit que :

$$E_m(t) = \frac{1}{2}k.{R_1}^2.e^{-2.\zeta.\omega_0.t}.\cos^2(\omega_1.t - \varphi_1) + \frac{1}{2}m.{\omega_1}^2.{R_1}^2.e^{-2.\zeta.\omega_0.t}.\sin^2(\omega_1.t - \varphi_1)$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}k.{R_1}^2.e^{-2.\zeta.\omega_0.t}.(\cos^2(\omega_1.t - \varphi_1) + \sin^2(\omega_1.t - \varphi_1))$$

Avec $\omega_1 = \omega_0.\sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_0$ pour $\zeta^2 \ll 1$, en posant $k = m.\omega_0^2$.

$$\boxed{E_m(t) = \frac{1}{2}k.{R_1}^2.e^{-2.\zeta.\omega_0.t}}$$

On vérifie que l'énergie mécanique subit une décroissance exponentielle. Dans le cas particulier où $\zeta = 0$, l'énergie mécanique est constante et conforme aux résultats établit pour l'oscillateur harmonique.

12) On utilise le théorème de l'énergie mécanique. La variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives. Seules deux forces travaillent (les autres sont orthogonales au mouvement) : la force de rappel élastique (qui est conservative) et la force de frottement.

Donc on a :

$$\frac{dE(t)}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{F_f})$$
$$\frac{dE(t)}{dt} = -\gamma\vec{v}.\vec{v}$$
$$\boxed{\frac{dE(t)}{dt} < 0}$$

Donc l'énergie est bien une fonction décroissante.

Commentaire : L'énergie mécanique est l'énergie totale du système. Or les forces de frottement sont des forces dissipatives : elles font perdre irrémédiablement de l'énergie au système.

13) On remarque sur le graphique que $x(t_2) = x(t_1 + T)$

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(\frac{e^{-\zeta\omega_0 t}[A_d.\cos(\omega_1 t) + B_1.sin(\omega_1 t)]}{e^{-\zeta\omega_0 t}\left[x_0.\cos\left(\omega_1(t+T)\right) + B_1.sin\left(\omega_1(t+T)\right)\right]}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \ln\left(e^{\zeta\omega_0 T}\right)$$

Car les fonctions trigonométriques sont T-périodiques.

Or $T = \frac{2\pi}{\omega_1} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$ car $\zeta \ll 1$

$$\boxed{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx 2\pi\zeta}$$

14) A partir des valeurs indiquées sur la figure 2 ($x_1 = 0{,}014602\ m$ et $x_2 = 0{,}010661\ m$) on calcule : $\zeta = 0{,}0500 = 5{,}00.10^{-2}$ avec 2 C.S.

On vérifie que $\zeta^2 \ll 1$ et on peut faire l'hypothèse que $\omega_1 = \omega_0$. Sachant que $k = m.\omega_0^2$ on détermine $k = 271.10^3\ \mathrm{N.m^{-1}}$. Sachant que $\gamma = 2.m.\zeta.\omega_0$ on détermine $\gamma = 17{,}3.10^3\ N.m^{-1}.s$.

15) De la même manière qu'à la question 7), en appliquant le principe fondamental de la dynamique au système, on établit que :

$$\vec{P} + \vec{N} + \overrightarrow{F_{rappel}} + \vec{F_f} + \vec{F}_{exc} = m\vec{a}$$

En tenant compte des résultats établis précédemment, on établit que :

$$\ddot{x} + 2.\zeta.\omega_0.\dot{x} + {\omega_0}^2.x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega.t)$$

16) On considère que le système est en régime forcé dès lors que l'on peut négliger le régime transitoire devant la solution harmonique (cf cours).

17) En adoptant les notations complexes :

$$\underline{x}(t) = X.e^{j.(\omega.t-\varphi)} = \underline{X}.e^{j.\omega.t}$$

L'équation différentielle devient :

$$\underline{\ddot{x}}(t) + 2.\zeta.\omega_0.\underline{\dot{x}}(t) + \omega_0^2.\underline{x}(t) = \frac{F_0}{m}\left(e^{j.\omega.t}\right)$$

En explicitant :

$$-\omega^2.\underline{x}(t) + 2.j.\omega.\zeta.\omega_0.\underline{x}(t) + \omega_0^2.\underline{x}(t) = \frac{F_0}{m}\left(e^{j.\omega.t}\right)$$

En factorisant $\underline{x}(t) = \underline{X}.e^{j.\omega.t}$

$$(-\omega^2 + 2.j.\omega.\zeta.\omega_0 + \omega_0^2).\underline{X}.e^{j.\omega.t} = \frac{F_0}{m}\left(e^{j.\omega.t}\right)$$

On en déduit que :

$$\underline{X} = \frac{F_0}{m}\left(\frac{1}{-\omega^2 + 2.j.\omega.\zeta.\omega_0 + \omega_0^2}\right)$$

Avec $\underline{X} = X.e^{-j.\varphi}$ on vérifie que :

$$\boxed{\begin{cases} X = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{1}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (2.\zeta.\omega_0.\omega)^2}} \\ \tan\varphi = \dfrac{2.\zeta.\omega_0.\omega}{{\omega_0}^2 - \omega^2} \end{cases}}$$

18) On pose $M = k.X/F_0$ et $r = \omega/\omega_0$:

$$M = \frac{k}{m}\frac{1}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (2.\zeta.\omega_0.\omega)^2}} = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{({\omega_0}^2 - \omega^2)^2 + (2.\zeta.\omega_0.\omega)^2}}$$

$$M(r) = \frac{1}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2.\zeta.r)^2}}$$

M est une grandeur sans dimension qui correspond au rapport du signal de sortie sur le signal d'entrée (équivalent à la fonction de transfert du filtre).

19) La fonction $M(r)$ admet un extremum si :

$$\frac{dM(r)}{dr} = \left(-\frac{1}{2}\right) f(r)^{-\frac{3}{2}}.\left(\frac{df(r)}{dr}\right) = 0$$

En posant $f(r) = (1 - r^2)^2 + (2.\zeta.r)^2$

Cette égalité est vérifiée pour :

$$\frac{df(r)}{dr} = -4.r + 4.r^3 + 8.\zeta.r = 0$$

Avec $r \neq 0$ on en déduit que $M(r)$ admet un maximum (l'étude asymptotique montre que l'extremum est un maximum…) pour (avec $\zeta \geq 0$) :

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - r^2}{2}}$$

Posons qu'à la résonance $r = \omega_r/\omega_0$ on établit que :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0.\sqrt{1 - 2.\zeta^2}}$$

20) A.N. : La période propre de la plateforme est $T_0 = 4{,}0\ s$. Avec $\zeta = 0{,}0500 = 5{,}00.10^{-2}$, $T_r = T_0 = 4{,}0\ s$. Avec $T = 8{,}0\ s$ on vérifie que la plateforme n'est pas à la résonance.

Problème 5 Oscillations du Millenium bridge

A Modélisation par un oscillateur en régime transitoire

A.1 La relation fondamentale de la dynamique appliquée à la masse dans le référentiel terrestre supposé galiléen donne : $m\vec{a} = \vec{F}_f + m\vec{g} - k(x - \ell_0)\,\vec{u}_x$ qui, projeté sur l'axe Ox, donne $m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0)$. À l'équilibre $0 = -mg - k(x_{\text{eq}} - \ell_0)$, soit $x_{eq} = \ell_0 - \frac{mg}{k}$.

A.2 En posant $X = x - x_{eq}$, on obtient $\ddot{X} = -\frac{\alpha}{m}\dot{X} - \frac{k}{m}X$. On a donc $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ qui est la pulsation propre (pulsation du régime libre sans amortissement), $z = \frac{\alpha}{2\sqrt{km}}$ qui est le facteur d'amortissement, sans dimension.

A.3 Dans le cas $z = 0$, on reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique, les solutions s'écrivent $X(t) = K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)$ avec K_1 et K_2 des constantes d'intégrations qui se déterminent à partir des conditions initiales : $X(t) = X_0\cos(\omega t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega t)$. Les oscillations sont ici non amorties et le système conserve son énergie mécanique.

Dans le cas $0 < z < 1$ L'équation caractéristique $r^2 + 2z\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$ est de discriminant $\Delta = 4z^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 < 0$, le régime est donc pseudo-périodique et les solutions sont de type $X(t) = A\cos(\omega t + \phi)\exp(-z\omega_0 t)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - z^2}$. Avec les conditions initiales données, on obtient : $X(t) = X_0\cos(\omega t) + \frac{V_0 + z\omega_0 X_0}{\omega_0}\sin(\omega t)\exp(-z\omega_0 t)$. On a dans ce cas des oscillations amorties.

A.4 Code python associé aux questions demandées :

```
import numpy as np
#z, omega0, X0 et V0 sont définies préalablement comme des variables globales
Y0=[X0,V0]
def phiPont(Y,t):
    X=Y[0]
    Xpoint=Y[1]
    return np.array([Xpoint,-2*z*omega0*Xpoint-omega0**2*X])
#################################
def Euler2(Phi,X0,tfinal,N):#Phi est la fonction reliant la dérivée à la fonction, X0 la consdition initile, tfinal, N le nombre
    t=np.linspace(0,tfinal, N)# calcul des différents instants
    h=t[1]-t[0]# pas de calcul
    X=np.zeros((N,2))  #Initialisation d'un vecteur représentation la valeur de la fonction
    X[0,:]=X0[:] #prise en compte des conditions initiales
    for k in range(0,N-1):
        X[k+1,:]=X[k,:] + h*Phi(X[k,:],t[k])
    return t,X
#Résolution selon le nombre de points
t1,X1=Euler2(phiPont,X0,tfinal,N1)
```

A.5 Avec une force $\vec{F}_v = \beta\dot{x}\vec{u}_x$, cela revient à remplacer α par $\alpha - \beta$. Le terme d'ordre 1 peut devenir négatif ce qui engendre une instabilité : solution avec exponentielle divergente au lieu de sinusoïdale amortie.

B Modélisation par un oscillateur en régime forcé

B.1 Le principe fondamental de la dynamique projeté sur Ox dans le référentiel terrestre devient

$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - mg - k(x - \ell_0) - F_0 - F_1\cos(2\pi f t)$, soit $\ddot{X} = -z\omega_0\dot{X} - \omega_0^2 X - \frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$, soit encore en prenant comme variable Y : $\ddot{Y} + 2z\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$.

B.2 Réécrit en complexe, on obtient $\underline{Y}\left(-\omega^2 + 2\mathrm{i}\omega z\omega_0 + \omega_0^2\right) = -\underline{E}$ soit

$$\underline{H}(\mathrm{i}\omega) = \frac{-1/\omega_0^2}{1 + 2\mathrm{i}z\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right) + \left(\mathrm{i}\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

B.3 On observe un phénomène de résonance si l'amplitude réelle passe par un maximum pour une pulsation particulière appelée pulsation de résonance. La norme de $\underline{H}$ présente un maximum, lorsque la norme au carré du dénominateur présente un minimum. On pose $f(\Omega) = \left|\frac{1}{\omega_0^2\underline{H}}\right|^2 = \left(1 - \Omega^2\right)^2 + (2z\Omega)^2$. $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\Omega} = -2\left(1 - \Omega^2\right)2\Omega + 8z^2\Omega$ qui s'annule (en dehors de 0), si $z < \frac{1}{\sqrt{2}}$, pour $\Omega_r = \sqrt{1 - 2z^2}$.

B.4 Pour $z^2 \ll 1$, on a $\omega_r \approx \omega_0$ et $|H(\omega_r)| \approx \frac{1}{\omega_0^2}\frac{1}{2z}$.

B.5 L'asymptote horizontale à basse fréquence est à 0 dB, le maximum se situe à $\omega = 12\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ soit $f = 1{,}9\,\mathrm{Hz}$ et vaut 9 dB soit $\omega_0^2\,|\underline{H}|_{\max} = 10^{9/20} = 2,8$ et $z \approx \frac{1}{2(\omega_0^2 H_{\max})} = 0,18$.

B.6 On a vu dans la question précédente (et dans l'introduction) que le déplacement de le structure devenait important au niveau de la fréquence de résonance. Il faut éviter ce phénomène d'autant plus que cela peut aller jusqu'à la destruction.

B.7 On peut envisager un accéléromètre fixé au niveau de la hanche pour éviter les rotations et faire ensuite $\vec{F} = m\vec{a}$. Un capteur de force par extensométrie fixé au tablier pose problème car le piéton se déplace, problème que l'on peut résoudre à l'aide d'un tapis roulant. On peut également envisager une prise de vue video avec des marqueurs.

B.8 La fréquence de la marche est de l'ordre de 2 Hz, les deux pieds jouant un rôle symétrique, la fréquence de la force verticale est le double. On trouve des fréquences multiples puisque la marche ne peut pas être considérée comme sinusoïdale

B.9 La fréquence de résonance du pont correspond à la fréquence de la marche !

Le système d'« amortisseur » n'a pas amorti grand chose (-2 dB), mais a par contre dédoublé la résonance en créant une anti résonance pour la fréquence de la marche (-8 dB cette fois). L'explication vient donc du couplage des deux oscillateurs, hors programme.