

## Exercice 1 Pickup de guitare

### A Étude générale

**A.1** Ce filtre est un passe-bas d'ordre deux car :

- sa bande passante est du type  $[0, f_c]$ ,
- la pente de son asymptote oblique en haute fréquence est de  $-40$  dB/dec.

**A.2** Équation de l'asymptote horizontale en Très Basse Fréquence (TBF) :

$$G_{dB}^{\text{TBF}} = 0 \text{ dB}$$

Équation de l'asymptote oblique en Très Haute Fréquence (THF) :

$$G_{dB}^{\text{THF}} = G_{dB,0} - 40 \log(f) = 40 \log(f_i) - 40 \log(f)$$

avec  $f_i = 3,0$  kHz.

formes canoniques de différentes fonctions de transfert :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} \quad ; \quad \underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2} \quad ; \quad \underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$$

**A.3**

- La fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jx}$  ne peut pas convenir car c'est une fonction de transfert d'ordre 1.
- La fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$  ne peut pas convenir car  $\underline{H} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$  et  $x \rightarrow +\infty$ . C'est la fonction de transfert d'un filtre passe bande.
- Il reste alors la fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{x}{Q} - x^2}$ . C'est une fonction de transfert d'ordre 2 et  $\underline{H} \rightarrow H_0$  lorsque  $x \rightarrow 0$  et  $\underline{H} \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow +\infty$ . C'est bien la fonction de transfert d'une filtre passe-bas d'ordre 2. Cette fonction de transfert convient.

**A.4** Soient  $\underline{H}^{\text{TBF}}$  et  $\underline{H}^{\text{THF}}$  les fonctions de transfert équivalentes en Très Basse Fréquence et Très Haute Fréquence.

- $\underline{H}^{\text{TBF}} = H_0$  donc  $G_{dB}^{\text{TBF}} = 20 \log(H_0)$ .
- $\underline{H}^{\text{THF}} = \frac{-H_0}{x^2}$  donc  $G_{dB}^{\text{THF}} = 20 \log(H_0) - 40 \log(x)$ .

Soit  $I(f_I, G_{dB,I})$  le point d'intersection des deux asymptotes.

$G_{dB}^{\text{TBF}} = G_{dB}^{\text{THF}}$  lorsque  $20 \log(H_0) = 20 \log(H_0) - 40 \log(x_I)$ , donc  $x_I = 1$ . On en déduit

$$f_I = f_0 \quad \text{et} \quad G_{dB,I} = 20 \log(H_0)$$

**A.5** Pour tout  $x$  :

$$G_{dB} = 20 \log(H_0) - 10 \log \left( (1 - x^2)^2 + \left( \frac{x}{Q} \right)^2 \right)$$

$$\Delta\varphi = -\arccos \left( \frac{1 - x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left( \frac{x}{Q} \right)^2}} \right)$$

Pour  $f = f_0$  ou  $x = 1$  :

$$G_{dB}(x = 1) = 20 \log(H_0) + 20 \log(Q)$$

$$\Delta\varphi(x = 1) = -\frac{\pi}{2}$$

Une autre méthode consiste à estimer la fonction de transfert en  $x = 1$  puis à calculer sa phase et son module :

$$\underline{H}(x = 1) = \frac{H_0}{j\frac{1}{Q}} = -jQH_0$$

Ainsi,  $\Delta\varphi(x = 1) = \arg(-jQH_0) = -\frac{\pi}{2}$  avec  $H_0 > 0$  et

$$G_{dB}(x = 1) = 20 \log(|\underline{H}(x = 1)|) = 20 \log(H_0) + 20 \log(Q)$$

**A.6** D'après le diagramme de Bode du gain fourni :

- $f_0 = f_I = 3,0 \text{ kHz}$  (en lisant la fréquence à l'intersection des asymptotes),
- $H_0 = 1$  (en exploitant  $G_{dB}^{\text{TBF}} = 20 \log(H_0) = 0$ ),
- D'après ce qui précède  $G_{dB}(x = 1) = 20 \log(H_0) + 20 \log(Q) = 20 \log(Q)$  et on lit  $G_{dB}(f = f_0) = 14 \text{ dB}$  donc  $Q = 10^{\frac{14}{20}}$  soit  $Q = 5,0$ .

## B Filtrage d'une vibration de corde

**B.1** Le déclenchement de l'oscilloscope est réglé avec une tension seuil à  $2,0 \text{ V}$  en front montant sur la voie 1. La tension  $u_e(t)$  est mesurée sur la voie 1 donc  $\varphi_e = 0$  et

$$u_e(t) = U_{e0} + U_e \sin(\omega_0 t)$$

Notons le gain  $H = |\underline{H}|$

$u_s(t) = U_{s0} + U_s \sin(\omega_0 t + \varphi_s)$  avec  $U_{s0} = H(\omega = 0) \times U_{e0}$ ,

$U_s = H(\omega_0 = 2\pi f_0) \times U_e$  et  $\varphi_s = \Delta\varphi(\omega_0 = 2\pi f_0) + \varphi_e = \Delta\varphi(\omega_0 = 2\pi f_0)$ .

Or  $H(\omega = 0) = H_0 = 1$  donc  $U_{s0} = U_{e0}$ .

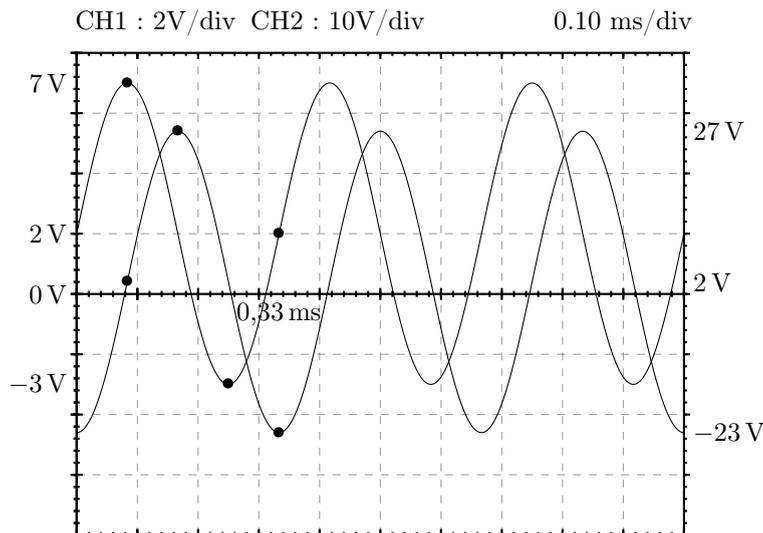
Par ailleurs,  $H(\omega_0 = 2\pi f_0) = 10^{14/20} = 5,0$  donc  $U_s = 5,0 \times U_e$ .

Et enfin,  $\Delta\varphi(\omega_0 = 2\pi f_0) = -\pi/2$  donc  $\varphi_s = -\pi/2$ .

Finalement :

$$u_s(t) = U_{e0} + U_s \sin(\omega_0 t - \pi/2) = U_{e0} - U_s \cos(\omega_0 t)$$

Cette tension  $u_s(t)$  est visualisée sur la voie 2. Elle est en quadrature retard par rapport à  $u_e(t)$ , présente la même composante continue mais une amplitude 5 fois plus grande.



**B.2** Pour le signal d'entrée :

- $A_{dB,e0} = 20 \log\left(\frac{U_{e0}}{U_{ref}}\right) = 20 \log\left(\frac{2}{10 \times 10^{-3}}\right) = 46 \text{ dB}$ ,
- $A_{dB,e1} = 20 \log\left(\frac{U_{e1}}{U_{ref}}\right) = 20 \log\left(\frac{5,0}{10 \times 10^{-3}}\right) = 54 \text{ dB}$ .

D'où le spectre en amplitude en dB :

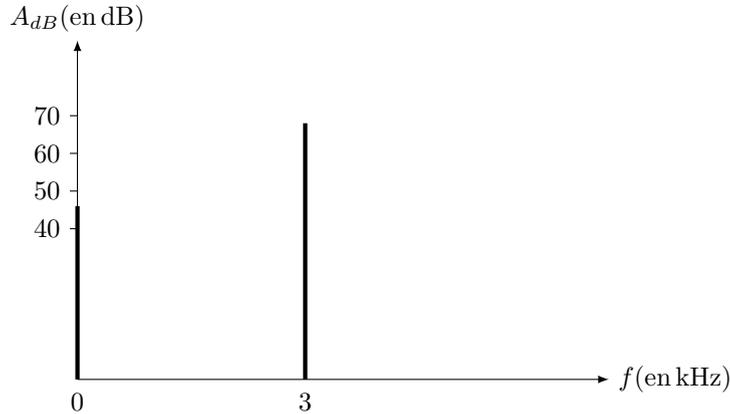


Pour le signal de sortie :

$$- A_{dB,s0} = 20 \log \left( \frac{U_{s0}}{U_{ref}} \right) = 20 \log \left( \frac{2}{10 \times 10^{-3}} \right) = 46 \text{ dB},$$

$$- A_{dB,s1} = 20 \log \left( \frac{U_{s1}}{U_{ref}} \right) = 20 \log \left( \frac{25}{10 \times 10^{-3}} \right) = 68 \text{ dB}.$$

D'où le spectre en amplitude en dB :



**B.3** On peut lire sur le spectre fourni  $6f_1 = 2,0 \times 10^3 \text{ Hz}$ , donc la fréquence fondamentale  $f_1 = 3,3 \times 10^2 \text{ Hz}$ . C'est la corde du mi aigüe ( $f_{mi} = 329,6 \text{ Hz}$ ).

**B.4** Les harmoniques les plus proches de 3 kHz et de 8 kHz ont une amplitude de 3 dB et 5 dB respectivement d'après le spectre fourni.

Sur le diagramme de Bode en amplitude on lit  $G_{dB}(3 \text{ kHz}) = 14 \text{ dB}$  et  $G_{dB}(8 \text{ kHz}) = -16 \text{ dB}$ . L'harmonique de fréquence 3 kHz est amplifiée alors que celle à 8 kHz est atténuée.

$$\text{Par déf. } G_{dB,i} = 20 \log \left( \frac{U_{si}}{U_{ei}} \right) = 20 \log \left( \frac{U_{si}}{U_{ref}} \times \frac{U_{ref}}{U_{ei}} \right) = A_{dB,si} - A_{dB,ei}.$$

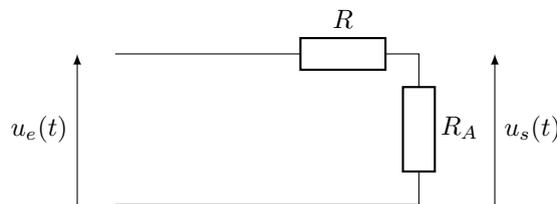
L'amplitude en dB d'une composante de la tension de sortie vaut donc

$$A_{dB,si} = A_{dB,ei} + G_{dB,i}$$

Finalement :  $A_{dB,s}(3 \text{ kHz}) = 17 \text{ dB}$  et  $A_{dB,s}(8 \text{ kHz}) = -11 \text{ dB}$ .

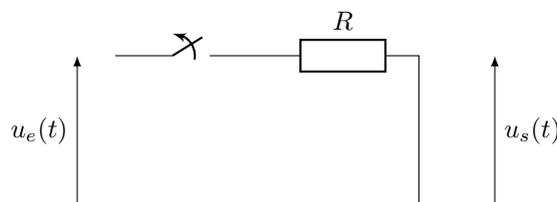
## C Modèle électrocinétique du pickup

**C.1** Aux basses fréquences  $|Z_L| \rightarrow 0$  et  $|Z_C| \rightarrow +\infty$  d'où le circuit équivalent suivant :



La tension de sortie vaut donc  $u_s(t) = u_e(t) \frac{R_A}{R + R_A}$ .

Aux hautes fréquences  $|Z_L| \rightarrow +\infty$  et  $|Z_C| \rightarrow 0$  d'où le circuit équivalent suivant :



La tension de sortie  $u_s(t) = 0$ .

Ce montage est donc un filtre passe bas comme cela a été vu dans la partie A.

**C.2** Soit  $Y_{eq} = j(C + C_C)\omega + \frac{1}{R_A}$  l'admittance de  $C$ ,  $C_C$  et  $R_A$  en parallèle.

D'après la formule du diviseur de tension :  $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1 + Y_{eq}(jL\omega + R)}$  soit

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \left(j(C + C_C)\omega + \frac{1}{R_A}\right)(jL\omega + R)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R}{R_A} + j\left(R(C + C_C)\omega + \frac{L\omega}{R_A}\right) - L(C + C_C)\omega^2}$$

$$\underline{H} = \frac{\frac{R_A}{R + R_A}}{1 + j\frac{R_A}{R + R_A}\left(R(C + C_C) + \frac{L}{R_A}\right)\omega - \frac{R_AL(C + C_C)}{R + R_A}\omega^2}$$

On sait que  $\underline{H}$  se met sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{Q\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

donc par identification :

$$H_0 = \frac{R_A}{R + R_A}, \omega_0 = \sqrt{\frac{R + R_A}{R_AL(C + C_C)}} \text{ et}$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{R_A}{R + R_A} \left(R(C + C_C) + \frac{L}{R_A}\right) \text{ d'où } Q = \frac{1}{\omega_0} \frac{R + R_A}{R_AR(C + C_C) + L}$$

$$\text{soit } Q = \frac{\sqrt{(R + R_A)R_AL(C + C_C)}}{R_AR(C + C_C) + L}.$$

**C.3** Si  $R_A \gg R$  alors  $\omega_0 \simeq \frac{1}{\sqrt{L(C + C_C)}}$  et  $Q \simeq \frac{R_A\sqrt{L(C + C_C)}}{R_AR(C + C_C) + L}$ .

**C.4** On a vu dans la partie A qu'une surtension d'un facteur 5,0 (gain de 5,0) est obtenue à la pulsation  $\omega_0$  si  $Q = 5,0$ . Le facteur de qualité du filtre est donc élevé et la pulsation de résonance  $\omega_R = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \simeq \omega_0$ . (On observe effectivement que la fréquence de résonance  $f_R$  se confond avec la fréquence d'intersection des asymptotes  $f_I = f_0$  sur le diagramme de Bode fourni). Dans ce cas, on cherche les valeurs de  $C_C$  et de  $R_A$  permettant d'avoir  $f_0 = 3,0$  kHz et  $Q = 5,0$ .

$$\text{D'après l'expression de } \omega_0 : C_C = \frac{1}{L\omega_0^2} - C. \text{ A.N. : } C_C = 4,6 \times 10^{-10} \text{ F.}$$

$$\text{Et d'après l'expression de } Q : R_A = \frac{QL}{\sqrt{L(C + C_C)} - QR(C + C_C)}.$$

$$\text{A.N. : } R_A = 6,9 \times 10^5 \Omega.$$

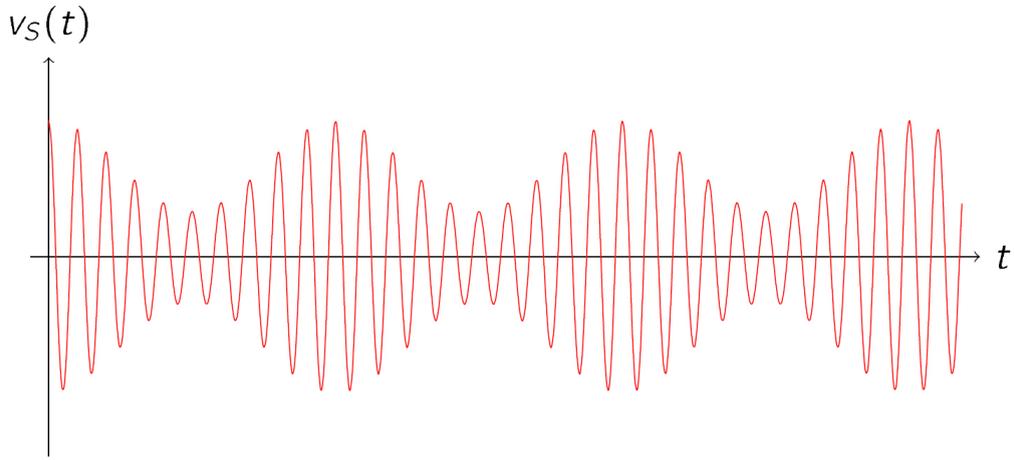
On vérifie *a posteriori* que  $R_A \gg R$  ce qui valide nos approximations.

## Exercice 2 De la phase à l'amplitude...

### A Modulation d'amplitude

**A.1**  $v_S(t) = v_{S_1}(t) + u_2(t) = ku_1(t)u_2(t) + u_2(t)$  soit  $v_S(t) = kU_m U_0 \cos(\omega_m t) \cos(\omega_p t)$ . On a alors  $v_S(t) = U_0 \cos(\omega_p t) [1 + m \cos \omega_m t]$  avec  $m = kU_m$ .

**A.2** Par exemple pour  $m = 0,5$  :



## B Modulation de phase - Méthode d'Armstrong

**B.1**  $v_p(t) = U_0 \cos(\omega_p t + m \cos(\omega_m t)) = U_0 (\cos(\omega_p t) \cos(m \cos(\omega_m t)) - \sin(\omega_p t) \sin(m \cos(\omega_m t)))$   
 Or comme  $m \ll 1$  :  $v_p(t) \simeq U_0 (\cos(\omega_p t) - m \cos(\omega_m t) \sin(\omega_p t))$ .

On identifie donc  $f(t) = -U_0 m \cos(\omega_m t)$ .

**B.2** On a :  $v_S(t) = v_{S1}(t) + u_2(t) = k u_1(t) u_2'(t) + u_2(t) = k U_m \cos(\omega_m t) u_2'(t) + U_0 \cos(\omega_p t)$

On a  $v_S(t) = v_p(t)$  à condition que :  $u_2'(t) = -U_0 \frac{m}{k U_m} \sin(\omega_p t) = -U_0 \sin(\omega_p t)$ .

L'opérateur « Dp » doit donc ajouter une phase de  $+\frac{\pi}{2}$  à  $u_2(t)$ .

## C Réalisation de l'opérateur « Dp »

**C.1** On peut librement fixer la masse dans le circuit, mettons-la en bas. On applique le théorème de Millman à la sortie (-) de l'A.O.1, comme on est en régime linéaire  $V_- = V_+ = 0$  et comme les A.O. sont idéaux il n'y a pas de courant de sortie, on obtient :  $0 = \frac{u_e}{R_1} + \frac{u_1}{R_1}$  d'où  $u_1 = -u_e$ . Cette partie gauche du circuit est simplement un inverseur.

**C.2** On s'intéresse maintenant à l'A.O.2, lui aussi idéal et en régime linéaire. Le théorème de Millman à sa borne (-) donne :  $V_- (\frac{1}{R} + \frac{1}{R}) = \frac{u_1}{R} + \frac{u_S}{R}$ , soit finalement :  $2V_- = u_1 + u_S$ . Le théorème de Millman à sa borne (+)

donne :  $V_+ (\frac{1}{R} + jC\omega) = \frac{u_1}{R}$ , soit finalement  $V_+ = \frac{u_1}{1+jRC\omega}$ . Comme  $V_- = V_+$ , on en déduit :  $H_1(j\omega) = \frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$ .

En totalité :

$$H(j\omega) = -\frac{1-jRC\omega}{1+jRC\omega}$$

**C.3** On remarque que  $|H(j\omega)| = 1$ ,  $\forall \omega$  donc l'opérateur ne change pas l'amplitude. Par contre  $Arg(H(j\omega)) = \pi + Arg(1-jRC\omega) - Arg(1+jRC\omega) = \pi - 2\arctan(RC\omega)$ , l'opérateur introduit donc un déphasage  $\varphi_D$  entre l'entrée et la sortie :

$$\varphi_D = \pi - 2\arctan(RC\omega)$$

**C.4** On veut ici  $\varphi_D = \frac{\pi}{2}$  ce qui correspond à  $\arctan(RC\omega_p) = \frac{\pi}{4}$  d'où  $RC\omega_p = \tan(\frac{\pi}{4}) = 1$ , soit finalement

$$RC = \frac{1}{\omega_p}$$

### Exercice 3 What else !

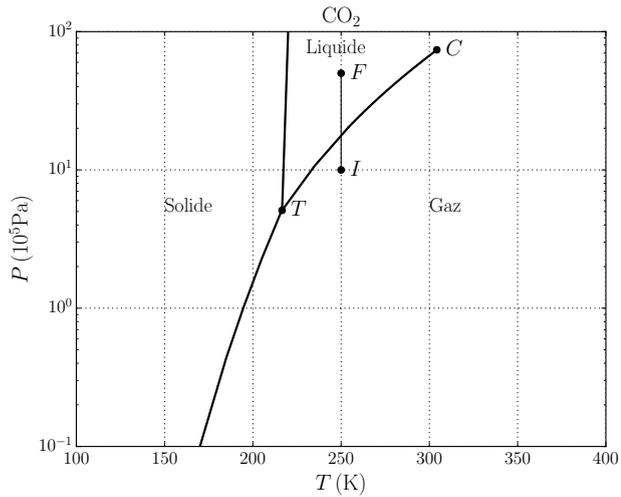
- Les hypothèses vérifiées par un gaz parfait sont l'absence d'interactions entre les molécules et le fait de supposer les molécules ponctuelles. On peut savoir si un gaz se comporte comme un gaz parfait en traçant l'évolution d'une transformation isotherme dans le digramme d'Amagat ( $PV=f(P)$  : la courbe est horizontale) ou dans le diagramme de Clapeyron ( $P=f(v)$  : la courbe est hyperbolique  $P = \frac{nRT}{V}$ ). Une autre façon est de faire subir successivement au gaz une détente de Joule Gay-Lussac et une détente de Joule-Thomson. Si ces deux détentes s'opèrent de façon isotherme, le gaz est parfait.
- On peut assimiler l'air à un mélange de 80% de diazote  $N_2$  de masse molaire  $M_{N_2} = 28 \text{ g.mol}^{-1}$  et de 20% de dioxygène  $O_2$  de masse molaire  $M_{O_2} = 32 \text{ g.mol}^{-1}$ . On obtient alors  $M_{air} = 0,8M_{N_2} + 0,2M_{O_2} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$ .
- Les  $n_{k-1}$  moles du corps de pompe occupent un volume  $V_0$  à la température  $T_0$  et à la pression  $P_{k-1}$ . On obtient donc à partir de la loi des gaz parfaits : 
$$n_{k-1} = \frac{P_{k-1}V_0}{RT_0}.$$
- Avant que la soupape extérieure ne soit fermée, les  $n_0$  moles du corps du piston occupent un volume  $V_{max}$  à la température  $T_0$  et à la pression atmosphérique  $P_0$ . On obtient donc à partir de la loi des gaz parfaits : 
$$n_0 = \frac{P_0V_{max}}{RT_0}.$$
- Avant que la soupape intérieure ne soit fermée, la quantité de matière occupant le corps de pompe de volume  $V_0$  et le piston de volume  $V_{min}$  est  $n_0 + n_{k-1}$ . Cette quantité d'air est à la pression  $P_k$  et à la température  $T_0$ .  
Lorsque la soupape intérieure se ferme, il reste  $n_{k-1}$  moles de gaz dans le corps de pompe et  $\frac{P_kV_{min}}{RT_0}$  moles dans le piston de volume  $V_{min}$ .  
La quantité de matière  $n_k$  contenue dans le corps de pompe en fin de séquence est donc :  
$$n_k = n_0 + n_{k-1} - \frac{P_kV_{min}}{RT_0}, \text{ soit } n_k = \frac{(n_0+n_{k-1})V_0}{V_0+V_{min}}.$$
- On en déduit :  $\frac{P_kV_0}{RT_0} = \frac{P_0V_{max}}{RT_0} + \frac{P_{k-1}V_0}{RT_0} - \frac{P_kV_{min}}{RT_0}$  soit 
$$P_k = \frac{P_0V_{max}}{V_0+V_{min}} + \frac{V_0}{V_0+V_{min}}P_{k-1}.$$
  
On retrouve donc bien  $P_k = \alpha P_{k-1} + \beta$  avec  $\alpha = \frac{V_0}{V_0+V_{min}}$  et  $\beta = \frac{P_0V_{max}}{V_0+V_{min}}$ .
- On tire de la relation de récurrence précédente que  $P_k = \sum_{n=0}^{k-1} \beta \alpha^n + \alpha^k P_0$  avec  $\alpha < 1$ .  
En utilisant le résultat relatif à la somme d'une suite géométrique de raison  $\alpha$ , on trouve 
$$P_\infty = \frac{V_{max}}{V_{min}} P_0.$$
- On en déduit  $\frac{V_{max}}{V_{min}} = 15$  pour  $P_\infty = 15 \text{ bar}$ .

### Exercice 4 La brèche de Roland

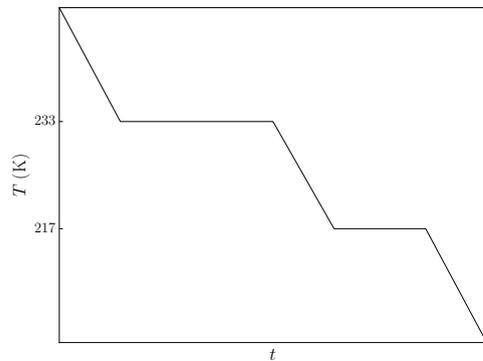
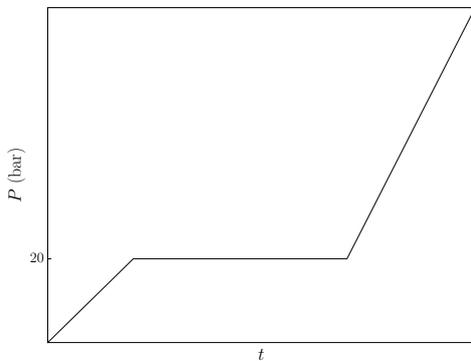
- La vitesse quadratique moyenne s'écrit  $v^* = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 5,1 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}$ .
- La loi des gaz parfaits permet d'écrire  $P_\ell(t)V_\ell = N_\ell(t)k_B T$  et  $P_e(t)V_e = N_e(t)k_B T$  où  $k_B = \frac{R}{N_A}$  est la constante de Boltzmann. Les densités de particules s'obtiennent en divisant le nombre de particules par le volume occupé :  $n_e^*(t) = \frac{N_e(t)}{V_e}$  et  $n_\ell^*(t) = \frac{N_\ell(t)}{V_\ell}$ . Le système global étant fermé, la quantité totale d'air se conserve :  $N_e(t) + N_\ell(t) = N_\ell(0) = \frac{P_{\ell 0}V_\ell}{k_B T}$ .
- Les particules d'air qui pénètrent dans (E) pendant  $\dagger$  se trouvent dans le cylindre de volume  $sv^*\dagger$ .  
Il y a  $n_\ell^*(t)sv^*\dagger$  particules mais seules 1/6 de ces particules vont bien pénétrer dans (E) :  
 $N_{L \rightarrow E} = \frac{1}{6}n_\ell^*(t)sv^*\dagger$ . De même,  $N_{E \rightarrow L} = \frac{1}{6}n_e^*(t)sv^*\dagger$ .
- La variation du nombre de particules présentes dans (E) pendant  $\dagger$  est égale à la différence entre le nombre de particules qui ont pénétré dans (E) pendant  $\dagger$  et le nombre de particules qui en sont sorties pendant  $\dagger$  :  $N_e(t) = N_{L \rightarrow E} - N_{E \rightarrow L} = \frac{1}{6}[n_\ell^*(t) - n_e^*(t)]sv^*\dagger = \frac{1}{6} \left[ \frac{N_\ell(0) - N_e(t)}{V_\ell} - \frac{N_e(t)}{V_e} \right] sv^*\dagger$ .  
Nous en déduisons :  $\frac{dN_e(t)}{dt} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{V_\ell} + \frac{1}{V_e} \right) sv^* N_e(t) = \frac{1}{6} \frac{N_\ell(0)}{V_\ell} sv^*$  ou encore :  
$$\frac{dP_e(t)}{dt} + \frac{1}{6} \left( \frac{1}{V_\ell} + \frac{1}{V_e} \right) sv^* P_e(t) = \frac{1}{6} \frac{sv^*}{V_e} P_{\ell 0}.$$
 Nous en déduisons la loi de variation de  $P_e(t)$  :  
$$P_e(t) = P_{e,f} (1 - \exp(-t/\tau)) \text{ avec } \tau = \frac{6V_\ell V_e}{sv^*(V_\ell + V_e)} \text{ et } P_{e,f} = P_{\ell 0} \frac{V_\ell}{V_e + V_\ell}.$$
  
Cette loi est bien conforme aux observations de Roland.
- Nous obtenons  $P_{e,f} \simeq P_{\ell 0} = 1,0 \text{ bar}$  et  $s = \frac{6V_\ell V_e}{(V_\ell + V_e)v^*\tau} = 1,1 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$ .

## Exercice 5 Utiliser un diagramme ( $P, T$ )

1. Le point  $I$  correspondant à l'état initial est indiqué sur le diagramme ci-contre : le dioxyde de carbone est à l'état gazeux.
2. La transformation isotherme mène le système à l'état final  $F$  (segment de droite verticale sur le diagramme ( $P, T$ )) : le dioxyde de carbone est en phase liquide dans l'état final. La première étape correspond à la compression isotherme du gaz ; dans une deuxième étape a lieu le changement d'état à une pression de l'ordre de 20 bar puis la troisième étape correspond à la compression isotherme de la phase liquide.



3. Le graphe représentant la pression du  $\text{CO}_2$  au cours du temps fait apparaître un palier de changement d'état (figure de gauche).



4. Lors du refroidissement à pression constante, le gaz subit un premier changement d'état (liquéfaction) puis un second (solidification) l'amenant finalement dans la phase solide. L'évolution de la température avec le temps met en évidence les deux paliers de changement de phase (voir figure ci-dessus à droite).