

Problème 1 : Transferts thermiques par effet Joule

1) Appliquons le premier principe au système composé par les n moles de gaz parfait entre l'état initial E_1 et l'état final E_2 :

$$\Delta E_{tot1 \rightarrow 2} = \Delta E_{m,M_{1 \rightarrow 2}} + \Delta U_{1 \rightarrow 2} = w_{1 \rightarrow 2} + Q_{1 \rightarrow 2}$$

En négligeant la variation d'énergie mécanique macroscopique, l'évolution du système étant isochore :

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = Q_{1 \rightarrow 2}$$

Avec $Q_{1 \rightarrow 2} = Q_J = P_J \cdot \tau = r \cdot I^2 \cdot \tau$ et $\Delta U_{1 \rightarrow 2} = n \cdot C_{Vmol} \cdot (T_2 - T_1) = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$;

$$\frac{n \cdot R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) = r \cdot I^2 \cdot \tau$$

On en déduit l'expression de T_2 :

$$T_2 = T_1 + r \cdot I^2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{\gamma - 1}{n \cdot R} \right)$$

Sachant que $V_2 = V_1$:

$$p_2 = \frac{n \cdot R \cdot T_2}{V_2} = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{V_1} + r \cdot I^2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{\gamma - 1}{V_1} \right)$$

$$p_2 = p_1 + r \cdot I^2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{\gamma - 1}{V_1} \right)$$

A.N. : $T_2 = 336 \text{ K}$; $V_2 = 10,0 \text{ L}$ et $p_2 = 1,12 \text{ bar}$

2) Désormais l'évolution de E_1 à E_3 est monobare (très certainement isobare) avec $p_1 = p_3 = p_a$:

$$\Delta H_{1 \rightarrow 3} = Q_{1 \rightarrow 3}$$

En explicitant : $\Delta H_{1 \rightarrow 3} = n \cdot C_{Vmol} \cdot (T_3 - T_1) = \frac{n \cdot \gamma \cdot R}{\gamma - 1} (T_3 - T_1)$ et $Q_{1 \rightarrow 3} = r \cdot I^2 \cdot \tau$ soit :

$$\frac{n \cdot \gamma \cdot R}{\gamma - 1} (T_3 - T_1) = r \cdot I^2 \cdot \tau$$

$$T_3 = T_1 + r \cdot I^2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{\gamma - 1}{n \cdot \gamma \cdot R} \right)$$

$$V_3 = \frac{n \cdot R \cdot T_3}{p_3} = \frac{n \cdot R \cdot T_1}{p_1} + r \cdot I^2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot p_1} \right) = V_1 + r \cdot I^2 \cdot \tau \cdot \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma \cdot p_1} \right)$$

A.N. : $T_3 = 326 \text{ K}$; $p_3 = 1,00 \text{ bar}$ et $V_3 = 10,9 \text{ L}$

3) Dans le compartiment (2), l'évolution étant adiabatique et réversible, elle est isentropique. Sachant que l'entropie d'un gaz parfait est donnée par : $S(T, V) = n \cdot C_{Vmol} \cdot \ln T + n \cdot R \cdot \ln V + \text{cte}$, la variation d'entropie du gaz parfait dans le compartiment (2) entre l'état initial E_i et l'état final E_f est donnée par :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = n \cdot C_{Vmol} \cdot \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0$$

Soit :

$$T_f^{C_{Vmol}} \cdot V_f^R = T_i^{C_{Vmol}} \cdot V_i^R$$

L'évolution étant réversible, cette relation est vérifiée à chaque instant :

$$T^{C_{Vmol}} \cdot V^R = \text{cte}$$

Avec $C_{Vmol} = \frac{R}{\gamma - 1}$: en élevant la relation précédente à la puissance $\frac{\gamma - 1}{R}$ on établit que :

$$T \cdot V^{\gamma - 1} = \text{cte}$$

Avec l'équation d'état des gaz parfait : $T = \frac{p \cdot V}{n \cdot R}$ on établit la relation demandée :

$$p \cdot V^\gamma = \text{cte}$$

4) A l'équilibre thermodynamique, la cloison séparatrice est au repos donc : $p_{1f} = p_{2f}$. Le volume total est constant donc : $V_{1f} + V_{2f} = V_{i1} + V_{i2}$. En appliquant l'équation des gaz parfait aux gaz (1) et (2) dans l'état E_f :

$$T_{f1} + T_{f2} = \frac{1}{n \cdot R} (p_{f1} \cdot V_{f1} + p_{f2} \cdot V_{f2}) = \frac{2 \cdot p_i}{n \cdot R} (V_{f1} + V_{f2}) = \frac{2 \cdot p_i}{n \cdot R} (V_{i1} + V_{i2})$$

On établit ainsi que :

$$T_{f1} + T_{f2} = 4 \cdot T_i$$

5) Appliquons le premier principe de la thermodynamique au système composé par {(1) + (2)} entre l'état initial E_i et l'état final E_f :

$$\Delta E_{tot i \rightarrow f} = \Delta E_{m, M_{i \rightarrow f}} + \Delta U_{i \rightarrow f} = w_{i \rightarrow f} + Q_{i \rightarrow f}$$

En négligeant la variation d'énergie mécanique, l'évolution du système étant isochore :

$$\Delta U_{i \rightarrow f} = Q_{i \rightarrow f}$$

Explicitons :

$$\frac{n \cdot R}{\gamma - 1} (T_{f1} - T_{i1}) + \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} (T_{f2} - T_{i2}) = Q_{i \rightarrow f}$$

Avec $T_{i1} = T_{i2} = T_i$; $T_{f1} + T_{f2} = 4 \cdot T_i$ et $Q_{i \rightarrow f} = Q_J = P_J \cdot \tau = r \cdot l^2 \cdot \tau$ on établit que :

$$\frac{2 \cdot n \cdot R \cdot T_i}{\gamma - 1} = r \cdot l^2 \cdot \tau$$

Soit :

$$\tau = \frac{2 \cdot n \cdot R \cdot T_i}{r \cdot l^2 \cdot (\gamma - 1)}$$

A.N. : $\tau = 10,0 \cdot 10^3 s = 2 \text{ h } 47 \text{ mn}$

6) Nous savons que $p_{1f} = p_{2f} = 2 \cdot p_i = 2,00$ bars. Sachant que l'évolution du GP dans le compartiment (2) vérifie la relation de Laplace $p \cdot V^\gamma = \text{cte}$:

$$p_{2f} \cdot V_{2f}^\gamma = p_i \cdot V_i^\gamma$$

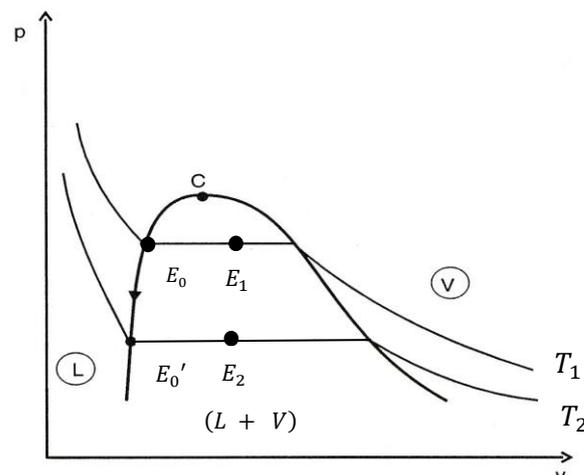
$$V_{2f} = V_i \cdot \left(\frac{p_i}{p_{2f}} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

A.N. : $V_{2f} = 10,0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{1,4}} = 6,10 \text{ L}$

Avec $V_{1f} + V_{2f} = V_{i1} + V_{i2}$ on établit que : $V_{1f} = 20,0 - 6,10 = 13,9 \text{ L}$. En appliquant l'équation d'état des GP aux GP dans les compartiments (1) et (2) on établit que : $T_{f1} = 834 \text{ K}$ et $T_{f2} = 366 \text{ K}$. Soit l'état E_f : ($p_{1f} = 2,00$ bars, $T_{1f} = 834 \text{ K}$, $V_{1f} = 13,9 \text{ L}$) et ($p_{2f} = 2,00$ bars, $T_{2f} = 366 \text{ K}$, $V_{2f} = 6,10 \text{ L}$)

Problème 2 : Vaporisation partielle de l'eau...

1) Allure de l'isotherme T_1 dans le diagramme (P, v) :



A l'état liquide, le corps pur est moins compressible qu'à l'état gazeux donc, en valeur absolue, la pente $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ est plus grand dans (L) que dans (V). A l'état diphasé (L + V) le corps pur est monovariant, c.à.d. qu'à T constant la pression (appelée pression de vapeur saturante) est constante.
 2) A l'équilibre, le système est diphasé donc la pression partielle de l'eau est égale à la pression de vapeur saturante :

$$P_e(T) = P_{sat}(T)$$

Le taux hygrométrique : $\tau = 1,00$

3) En appliquant l'équation d'état des gaz parfaits aux n_{v1} moles d'eau gazeuses dans l'état E_1 :

$$P_{sat}(T_1) \cdot V = n_{v1} \cdot R \cdot T_1$$

En négligeant le volume de l'eau liquide devant le volume V du récipient. Soit :

$$n_{v1} = \frac{P_{sat}(T_1) \cdot V}{R \cdot T_1}$$

$$\text{A.N. : } n_{v1} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \cdot 10,0 \cdot 10^{-3}}{8,31 \cdot 373} = 0,327 \text{ moles}$$

La masse d'eau à l'état gazeux est : $m_{v1} = n_{v1} \cdot M = 5,88 \text{ g}$ et le titre massique $x_1 = \frac{m_{v1}}{m} = 0,588 = 58,8 \%$.

4) Nous savons que : $l_{vap}(T) = h_V(T) - h_L(T)$. A.N. : $l_{vap}(T_1) = 2671,44 - 418,42 = 2253,02 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$

5) Par définition : $\Delta H_{0 \rightarrow 1} = m \cdot \Delta h_{0 \rightarrow 1}$ avec $\Delta h_{0 \rightarrow 1} = (x_1 - x_0) \cdot l_{vap}(T_1)$. Sachant que $x_0 = 0$:

$$\Delta H_{0 \rightarrow 1} = m \cdot x_1 \cdot l_{vap}(T_1)$$

$$\text{A.N. : } \Delta H_{0 \rightarrow 1} = 10,0 \cdot 10^{-3} \cdot 0,588 \cdot 2253,02 = 13,3 \text{ kJ}$$

Sachant que : $H = U + p \cdot V$

$$\Delta H_{0 \rightarrow 1} = \Delta U_{0 \rightarrow 1} + \Delta_{0 \rightarrow 1}(p \cdot V) = \Delta U_{0 \rightarrow 1} + p_1 \cdot V_1 - p_0 \cdot V_0$$

Avec $p_0 = p_1 = P_{sat}(T_1)$ et $V_1 = V \gg V_0$:

$$\Delta H_{0 \rightarrow 1} = \Delta U_{0 \rightarrow 1} + P_{sat}(T_1) \cdot V$$

$$\Delta U_{0 \rightarrow 1} = \Delta H_{0 \rightarrow 1} - P_{sat}(T_1) \cdot V$$

En explicitant $\Delta H_{0 \rightarrow 1}$:

$$\Delta U_{0 \rightarrow 1} = m \cdot x_1 \cdot l_{vap}(T_1) - P_{sat}(T_1) \cdot V$$

$$\text{A.N. : } \Delta U_{0 \rightarrow 1} = 13,3 \cdot 10^3 - 1,013 \cdot 10^5 \cdot 10,0 \cdot 10^{-3} = 12,3 \text{ kJ}$$

Le transfert thermique $Q_{0 \rightarrow 1}$ est donné par le premier principe de la thermodynamique appliqué à la masse m d'eau liquide qui subit une vaporisation partielle dans le vide, au contact thermique d'un thermostat de température T_1 :

$$\Delta E_{tot0 \rightarrow 1} = \Delta E_{m,M0 \rightarrow 1} + \Delta U_{0 \rightarrow 1} = w_{0 \rightarrow 1} + Q_{0 \rightarrow 1}$$

En négligeant la variation d'énergie mécanique, compte tenu du fait que la vaporisation s'effectue dans le vide $w_{0 \rightarrow 1} = 0$:

$$\Delta U_{0 \rightarrow 1} = Q_{0 \rightarrow 1}$$

6) Variation d'entropie de l'eau entre l'état initial E_0 à l'état final E_1 :

$$\Delta S_{0 \rightarrow 1} = \frac{\Delta H_{0 \rightarrow 1}}{T_1} = \frac{m \cdot x_1 \cdot l_{vap}(T_1)}{T_1}$$

$$\text{A.N. : } \Delta S_{0 \rightarrow 1} = 35,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

Entropie échangée entre l'état initial E_0 à l'état final E_1 :

$$S_{0 \rightarrow 1}^e = \frac{Q_{0 \rightarrow 1}}{T_1} = \frac{m \cdot x_1 \cdot l_{vap}(T_1) - P_{sat}(T_1) \cdot V}{T_1}$$

$$\text{A.N. : } S_{0 \rightarrow 1}^e = 33,0 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

7) Sachant que : $\Delta S_{0 \rightarrow 1} = \Delta S_{0 \rightarrow 1} + S_{0 \rightarrow 1}^c$

$$S_{0 \rightarrow 1}^c = \Delta S_{0 \rightarrow 1} - S_{0 \rightarrow 1}^e = \frac{P_{sat}(T_1) \cdot V}{T_1} = 2,7 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

On vérifie que $S_{0 \rightarrow 1}^c > 0$ ce qui est en accord avec le caractère irréversible de l'évolution.

8) Dans l'état E_0 l'eau est liquide à la température T_1 donc : $s_0 = s_L(T_1)$. Dans l'état E_1 l'eau est diphasée à la température T_1 donc :

$$s_1 = (1 - x_1) \cdot s_L(T_1) + x_1 \cdot s_V(T_1)$$

La variation d'entropie massique de l'état E_0 à l'état E_1 est donnée par :

$$\Delta s_{0 \rightarrow 1} = s_1 - s_0 = (1 - x_1) \cdot s_L(T_1) + x_1 \cdot s_V(T_1) - s_L(T_1)$$

On vérifie que :

$$\Delta s_{0 \rightarrow 1} = x_1 \cdot (s_V(T_1) - s_L(T_1))$$

A.N. : $\Delta s_{0 \rightarrow 1} = 0,588 \cdot (7,355 - 1,307) = 3,56 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $\Delta S_{0 \rightarrow 1} = m \cdot \Delta s_{0 \rightarrow 1} = 35,6 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$

On vérifie que ce résultat est très proche de celui établi à la question 6) (écart relatif de 0,3 %).

9) Soit $\Delta s_{1 \rightarrow 2}$ la variation d'entropie massique de l'eau entre l'état initial E_1 et l'état final E_2 . L'entropie étant une fonction d'état, sa variation ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement de l'état initial E_1 et de l'état final E_2 . On peut donc décomposer la détente en trois étapes :

- Une première étape au cours de laquelle le corps pur subit une liquéfaction isotherme à T_1 de E_1 vers E_0 :

$$\Delta s_{1 \rightarrow 0} = \frac{\Delta h_{1 \rightarrow 0}}{T_1} = \frac{(x_0 - x_1) \cdot l_{vap}(T_1)}{T_1} = -\frac{x_1 \cdot l_{vap}(T_1)}{T_1}$$

- Une deuxième étape au cours de laquelle l'eau liquide est refroidie de T_1 à T_2 au cours de l'évolution de E_0 à E_0' dans le diagramme (p, v) :

$$\Delta s_{0 \rightarrow 0'} = c_L \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)$$

- Une troisième étape au cours de laquelle l'eau liquide subit une vaporisation partielle à température constante T_2 de E_0' à l'état final E_2 :

$$\Delta s_{0' \rightarrow 2} = \frac{\Delta h_{0' \rightarrow 2}}{T_2} = \frac{(x_2 - x_{0'}) \cdot l_{vap}(T_2)}{T_2} = \frac{x_2 \cdot l_{vap}(T_2)}{T_2}$$

Avec $x_{0'} = 0$.

Sachant que l'évolution de l'état initial E_1 à l'état final E_2 est isentropique : $\Delta s_{1 \rightarrow 2} = 0$:

$$\Delta s_{1 \rightarrow 2} = \Delta s_{1 \rightarrow 0} + \Delta s_{0 \rightarrow 0'} + \Delta s_{0' \rightarrow 2} = 0$$

En explicitant :

$$-\frac{x_1 \cdot l_{vap}(T_1)}{T_1} + c_L \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) + \frac{x_2 \cdot l_{vap}(T_2)}{T_2} = 0$$

On établit que :

$$x_2 = \frac{T_2}{l_{vap}(T_2)} \left(\frac{x_1 \cdot l_{vap}(T_1)}{T_1} - c_L \cdot \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \right)$$

A.N. : A partir du tableau 1, on détermine $l_{vap}(T_2)$:

$$l_{vap}(T_2) = h_V(T_2) - h_L(T_2) = 2587,42 - 208,96 = 2378,46 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

$$x_2 = \frac{323}{2378,46} \left(\frac{0,588}{373} (2253,02) - 4,20 \cdot \ln\left(\frac{323}{373}\right) \right) = 0,564 = 56,4 \%$$

Problème 3 : Un cycle peu efficace

1. On a $C_p = \gamma C_v$ et, d'après la relation de Mayer: $C_p - C_v = nR$. D'où $C_v = \frac{nR}{\gamma - 1}$ et $C_p = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$.

2.1. Entre l'état 0 et l'état 1, le piston est immobile : le système subit une transformation isochore.

2.2. En écrivant la condition d'équilibre mécanique du système {surcharge + piston}, soumis à son poids et aux forces de pression exercées par l'air ambiant et par le gaz, on obtient en projection sur un axe vertical:

$$P_0 S + mg - P_1 S = 0$$

On a donc:
$$P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$$

D'autre part, à volume constant, il vient :
$$T_1 = T_0 \frac{P_1}{P_0} = T_0 \left(1 + \frac{mg}{P_0 S} \right)$$

A.N.: $P = 1,10 \text{ bar}$ et $T_1 = 329 \text{ K}$.

2.3. La transformation est isochore sans autre travail que celui des forces de pression. D'après le premier principe appliqué au gaz parfait, on a donc :

$$Q_0^1 = \Delta U = C_v (T_1 - T_0) = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_0) \text{ avec } nR = \frac{P_0 V_A}{T_0}$$

Finalement :
$$Q_0^1 = \frac{P_0 V_A}{\gamma - 1} \frac{T_1 - T_0}{T_0}$$

A.N.: $Q_0^1 = 7,98 \text{ J}$

3.1. La transformation de l'état 1 à l'état 2 est mécaniquement réversible. On peut donc considérer que le piston est en équilibre mécanique à tout instant, si bien que la transformation est isobare.

3.2. D'après l'équation d'état du gaz parfait, il vient donc :
$$T_2 = T_1 \frac{V_B}{V_A}$$

A.N.: $T_2 = 997 \text{ K}$

3.3. La transformation est isobare, sans autre travail que celui des forces de pression. On a donc pour

le gaz parfait : $Q_1^2 = \Delta H = C_p (T_2 - T_1) = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$, c'est à dire:

$$Q_1^2 = \frac{\gamma P_0 V_A}{\gamma - 1} \frac{T_2 - T_1}{T_0}$$

A.N.: $Q_1^2 = 257 \text{ J}$

4.1. La transformation de l'état 2 à l'état 3 est isochore; la transformation de l'état 3 à l'état 0 est isobare.

4.2. Le travail reçu sur les deux transformations isochores est nul; le travail total au cours du cycle se réduit au travail reçu sur les deux étapes isobares.

On a donc : $W = -P_1(V_B - V_A) - P_0(V_A - V_B) = (P_0 - P_1)(V_B - V_A)$, soit
$$W = -\frac{mg}{S}(V_B - V_A)$$
.

Ce travail s'identifie au travail du poids du piston entre A et B.

A.N.: $W = -6,57 \text{ J}$

4.3. Dans le diagramme de Clapeyron, le cycle est un rectangle. Ce cycle est parcouru dans le sens horaire, il s'agit donc d'un cycle moteur et $W < 0$.

Le travail est représenté par l'opposé de l'aire du rectangle. On a donc $-W = (P_1 - P_0)(V_B - V_A)$, ce

qui est bien le résultat de la question précédente.

5. D'après les questions précédentes, l'efficacité thermodynamique $\eta = \frac{-W}{Q_0^1 + Q_1^2}$ vaut $\boxed{\eta = 2,48\%}$.

On constate qu'il s'agit d'un cycle bien peu efficace.

Problème 4 : Détermination de γ par la méthode de Rückhardt

1) Appliquons le deuxième principe de la thermodynamique aux n moles de gaz parfait entre un état initial E_i et un état final E_f :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{i \rightarrow f}^e + S_{i \rightarrow f}^c$$

Dans l'hypothèse que l'évolution soit réversible ($S_{i \rightarrow f}^c = 0$) et adiabatique :

$$S_{i \rightarrow f}^e = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{front}}(t)} = 0$$

On vérifie que l'évolution est isentropique : $\Delta S_{i \rightarrow f} = 0$.

Appliquons l'identité thermodynamique fournie dans l'énoncé, entre E_i et E_f :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0$$

On établit que :

$$\ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + (\gamma - 1) \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = 0$$

Soit :

$$T_f \cdot V_f^{\gamma-1} = T_i \cdot V_i^{\gamma-1}$$

L'évolution est lente. Cette relation est donc vérifiée à tout instant : $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{cte}$. En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits, on établit la relation de Laplace :

$$p \cdot V^\gamma = \text{cte}$$

2) La section s du tube est très petite ($s = 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$). Dans l'hypothèse que l'amplitude des oscillations de la bille soit faible, on peut considérer que les variations de volume du gaz parfait résultant du mouvement de la bille sont très faibles devant le volume de la bouteille...on peut alors considérer que $dV = V - V_0$ et donc que $dP = P - P_0$.

Nous savons que le gaz satisfait l'équation de Laplace : $p \cdot V^\gamma = \text{cte}$. Considérons la dérivée logarithmique de cette relation :

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

On en déduit que :

$$dP = -\gamma \cdot \left(\frac{P}{V} \right) \cdot dV$$

Avec $dP = P - P_0$, au voisinage de l'état $E_0(P_0; V_0; T_0)$:

$$P - P_0 = -\gamma \cdot \left(\frac{P_0}{V_0} \right) \cdot dV$$

En notant que $dV = s \cdot z$ (avec $z < 0$) :

$$P - P_0 = -\gamma \cdot \left(\frac{P_0}{V_0} \right) \cdot s \cdot z$$

3) On assimile la bille à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Dans ce référentiel, le point matériel est soumis à :

- son poids : $\vec{p} = -m \cdot g \cdot \vec{u}_z$
- la force de pression exercée par l'atmosphère : $\vec{F}_0 = -P_0 \cdot s \cdot \vec{u}_z$
- la force de pression exercée par le G.P : $\vec{F}_{GP} = P \cdot s \cdot \vec{u}_z$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point matériel :

$$m \cdot \vec{a}(M) = \vec{p} + \vec{F}_0 + \vec{F}_{GP}$$

En explicitant et en projetant sur \vec{u}_z on établit que :

$$m \cdot \ddot{z} = -m \cdot g - P_0 \cdot s + P \cdot s$$

$$m \cdot \ddot{z} = -m \cdot g + (P - P_0) \cdot s$$

En utilisant l'expression établie à la question 2) :

$$m \cdot \ddot{z} = -m \cdot g - \left(\gamma \cdot \left(\frac{P_0}{V_0} \right) \cdot s^2 \right) \cdot z$$

On établit l'équation différentielle :

$$\ddot{z} + \left(\frac{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}{m \cdot V_0} \right) \cdot z = -g \quad (1)$$

Sachant que :

$$z = -\frac{V_0}{\gamma \cdot P_0 \cdot s} (P - P_0) \quad \text{et} \quad \ddot{z} = -\frac{V_0}{\gamma \cdot P_0 \cdot s} \ddot{P}$$

On établit l'équation différentielle vérifiée par P :

$$\ddot{P} + \left(\frac{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}{m \cdot V_0} \right) \cdot P = \frac{\gamma \cdot P_0 \cdot s \cdot g}{V_0} + \frac{\gamma \cdot P_0^2 \cdot s^2}{m \cdot V_0} \quad (2)$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.

4) On note ω la pulsation des oscillations :

$$\omega = \sqrt{\frac{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}{m \cdot V_0}} = \frac{2 \cdot \pi}{T}$$

La période des oscillations est donnée par :

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot V_0}{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}}$$

A partir de l'enregistrement, mesure de la période T : $17 \cdot T = 19,0 \text{ s}$ donc $T = 1,12 \text{ s}$. Avec :

$$\gamma = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot m \cdot V_0}{P_0 \cdot s^2 \cdot T^2}$$

A.N. : $\gamma = 1,31$. Si on assimile l'air à un gaz parfait diatomique (composé à 98% de N_2 et de O_2) alors $C_{Vmol} = \frac{5.R}{2}$ et $C_{Pmol} = \frac{7.R}{2}$ donc :

$$\gamma = \frac{C_{Pmol}}{C_{Vmol}} = \frac{7}{5} = 1,40$$

On constate que la valeur de γ mesurée est proche de la valeur attendue (écart relatif de 6 %).

5) A l'équilibre $\ddot{z} = 0$. A partir de la relation (1) on établit que :

$$z_{\acute{e}q} = -\frac{m \cdot V_0 \cdot g}{\gamma \cdot P_0 \cdot s^2}$$

A.N. : $z_{\acute{e}q} = -31,1 \text{ cm}$: cette valeur n'est pas compatible avec la position d'équilibre réelle de la bille qui est de $-41,0 \text{ cm}$.

6-1) Le gaz est en contact thermique avec un thermostat de température T_{ext} . Appliquons l'équation d'état des GP aux n moles de gaz contenues dans la bouteille dans l'état initial et dans l'état final :

- Dans l'état initial : $P_0 \cdot V_0 = n \cdot R \cdot T_{ext}$
- Dans l'état final : $P_{\acute{e}q} \cdot V_{\acute{e}q} = n \cdot R \cdot T_{ext}$ avec $P_{\acute{e}q} = P_0 + \frac{m \cdot g}{s}$ et $V_{\acute{e}q} = V_0 + z'_{\acute{e}q} \cdot s$

En explicitant :

$$P_0 \cdot V_0 = \left(P_0 + \frac{m \cdot g}{s} \right) \cdot (V_0 + z'_{\acute{e}q} \cdot s)$$

On établit que :

$$z'_{\acute{e}q} = \left(\frac{1}{1 + \frac{m \cdot g}{s \cdot P_0}} - 1 \right) \cdot \frac{V_0}{s}$$

Sachant que $(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x$ pour $x \ll 1$, avec $P_0 \gg \frac{m \cdot g}{s}$:

$$\frac{1}{1 + \frac{m \cdot g}{s \cdot P_0}} = \left(1 + \frac{m \cdot g}{s \cdot P_0} \right)^{-1} = 1 - \frac{m \cdot g}{s \cdot P_0}$$

$$z'_{\acute{e}q} = -\frac{m \cdot g \cdot V_0}{P_0 \cdot s^2}$$

A.N. : $z'_{\acute{e}q} = -40,7 \text{ cm}$: cette valeur est beaucoup plus proche de la position d'équilibre réelle de la bille. Ceci implique que l'évolution du gaz n'est pas adiabatique...

6-2) Appliquons le premier principe de la thermodynamique au système {bille + gaz parfait contenu dans la bouteille} entre l'état initial et l'état final :

$$\Delta E_{tot}(\text{syst}) = \Delta E_{m,M}(\text{syst}) + \Delta U(\text{syst}) = W_P + Q$$

6-3) L'énergie mécanique et l'énergie interne sont des grandeurs extensives donc :

- $\Delta E_{m,M}(\text{syst}) = \Delta E_{m,M}(\text{bille}) + \Delta E_{m,M}(\text{gaz})$: le gaz est au repos dans l'état initial et dans l'état final. On peut négliger la variation d'énergie mécanique du gaz devant celle de la bille :

$$\Delta E_{m,M}(\text{syst}) = \Delta E_{m,M}(\text{bille}) = m \cdot g \cdot z'_{\acute{e}q}$$

- $\Delta U(\text{syst}) = \Delta U(\text{bille}) + \Delta U(\text{gaz})$: en négligeant la capacité thermique de la bille devant celle du gaz :

$$\Delta U(\text{syst}) = \Delta U(\text{gaz}) = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} (T_f - T_i) = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} (T_{ext} - T_{ext}) = 0$$

- Travail des forces de pression exercées par l'atmosphère :

$$W_P = \int_i^f \delta W_P = - \int_i^f P_0 \cdot dV = -P_0 \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q}$$

En explicitant, on établit que :

$$m \cdot g \cdot z'_{\acute{e}q} = -P_0 \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q} + Q$$

$$Q = (m \cdot g + P_0 \cdot s) \cdot z'_{\acute{e}q} = P_{\acute{e}q} \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q}$$

A.N. : $Q = -8,27 J$: on constate que $Q < 0$ donc le système cède de l'énergie thermique au milieu extérieur... l'évolution n'est pas adiabatique ni isentropique : la relation de Laplace n'est pas vérifiée.

6-4) La variation d'entropie est donnée par l'identité thermodynamique :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = \frac{n \cdot R}{\gamma - 1} \ln \left(\frac{T_f}{T_i} \right) + n \cdot R \cdot \ln \left(\frac{V_f}{V_i} \right) = n \cdot R \cdot \ln(1 - X)$$

avec $T_i = T_f = T_{ext}$ et $V_i = V_0$; $V_f = V_0 + s \cdot z'_{\acute{e}q} = V_0 - \frac{m \cdot g \cdot V_0}{P_0 \cdot s} = V_0 \cdot \left(1 - \frac{m \cdot g}{P_0 \cdot s} \right) = V_0 \cdot (1 - X)$.

Entropie échangée :

$$S_{i \rightarrow f}^e = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{\text{front}}(t)} = \int_i^f \frac{\delta Q}{T_{ext}} = \frac{1}{T_{ext}} \int_i^f \delta Q = \frac{Q}{T_{ext}}$$

En explicitant Q :

$$S_{i \rightarrow f}^e = \frac{(m \cdot g + P_0 \cdot s) \cdot z'_{\acute{e}q}}{T_{ext}} = \frac{P_{\acute{e}q} \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q}}{T_{ext}}$$

Sachant que $P_{\acute{e}q} \cdot V_{\acute{e}q} = n \cdot R \cdot T_{ext}$:

$$S_{i \rightarrow f}^e = n \cdot R \cdot \left(\frac{P_{\acute{e}q} \cdot s \cdot z'_{\acute{e}q}}{P_{\acute{e}q} \cdot V_{\acute{e}q}} \right) = - \frac{n \cdot R \cdot X}{1 - X}$$

Sachant que $P_0 \gg \frac{m \cdot g}{s}$ nous savons que $X = \frac{m \cdot g}{P_0 \cdot s} \ll 1$ donc :

$$S_{i \rightarrow f}^e = - \frac{n \cdot R \cdot X}{1 - X} = -n \cdot R \cdot X \cdot (1 - X)^{-1} = -n \cdot R \cdot X \cdot (1 + X)$$

Avec :

$$\Delta S_{i \rightarrow f} = S_{i \rightarrow f}^e + S_{i \rightarrow f}^c$$

$$S_{i \rightarrow f}^c = \Delta S_{i \rightarrow f} - S_{i \rightarrow f}^e$$

En explicitant :

$$S_{i \rightarrow f}^c = n \cdot R \cdot (\ln(1 - X) + X \cdot (1 + X))$$

A.N. : si on considère que l'atmosphère est à la température $T_{ext} = 293 K$, $n = 0,411$ moles et $S_{i \rightarrow f}^c = 0,113 \text{ mJ} \cdot K^{-1}$. On vérifie que $S_{i \rightarrow f}^c > 0$ ce qui est en accord avec le caractère irréversible de l'évolution.