Devoir Maison n° 10

Mécanique

Problème 1 Seul sur Mars

L'histoire du film *The Martian* (Seul sur Mars) de Ridley Scott, montre comment un homme, Mark Watney, survit seul sur Mars grâce à ses connaissances scientifiques. L'environnement hostile de la planète représente une contrainte de taille pour les ingénieurs et les scientifiques qui travaillent pour que des hommes puissent un jour poser le pied sur la planète rouge. La NASA annonce un vol habité pour Mars dans les années 2030, l'hypothèse du film n'est donc pas irréaliste. Même si cette histoire repose sur des travaux scientifiques et des techniques aérospatiales actuelles, on peut se demander si l'histoire est bien réaliste.

Données

Données Terre-Mars :

	Terre	**Mars**
Composition de l'atmosphère	N_2 (77%), O_2 (21%)	CO_2 (95%), N_2 (2,7%)
Rayon des planètes (km)	6380	3390
Masse des planètes (kg)	$5{,}97 \times 10^{24}$	$6{,}42 \times 10^{23}$

Constantes et grandeurs :

Constante gravitationnelle	$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Célérité de la lumière	$c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$
Constante d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6{,}022 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8{,}314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$
Masses molaire ($\mathrm{g\,mol^{-1}}$)	H : 1,00 ; C : 12,0 ; N : 14,0 ; O : 16,0 ; Ar : 39,9
Distance Terre-Soleil	$a_T = 1$ u.a$=1{,}50 \times 10^{8}\,\mathrm{km}$
Rayon du Soleil	$R_s = 6{,}96 \times 10^{5}\,\mathrm{km}$
Masse du vaisseau Hermès	$\approx 500\,\mathrm{t}$

A Généralités

A.1 Définir le référentiel héliocentrique.

A.2 Montrer que le mouvement d'une planète autour du Soleil de centre de masse S est plan. Définir ce plan à partir de la position initiale de la planète P_0 et de sa vitesse initiale $\vec{v}_0$.

Dans la suite on considère le mouvement de la planète P de masse M_P en coordonnées polaires (r, θ) de centre S.

A.3 Calculer le moment cinétique de la planète par rapport à S. En déduire que le produit $r^2\dot{\theta}$ est une constante du mouvement.

A.4 Énoncer puis démontrer la deuxième loi de Kepler.

A.5 On considère que le mouvement de la planète autour du Soleil est circulaire de rayon r_P. Montrer que le mouvement est uniforme et exprimer la norme de la vitesse de la planète en fonction de G, de la masse du Soleil M_S et de r_P.

A.6 Démontrer dans le cas d'un mouvement circulaire que le rapport entre le carré de la période de la révolution de la planète autour du Soleil et le cube de la distance Soleil-planète est constant pour toutes les planètes du système solaire. Exprimer cette constante et nommer cette loi.

B La planète Mars

Mars est la quatrième planète par ordre de distance croissante au Soleil et la deuxième par masse et par taille croissantes sur les huit planètes que compte le système solaire. Dans le référentiel héliocentrique (aussi appelé référentiel de Kepler), supposé galiléen, la trajectoire de Mars est une ellipse contenue dans le plan de l'écliptique.

Extrait de CNRS *Le journal*
Question : Envoyer des humains sur Mars coûterait au moins 100 ou 200 milliards de dollars et ne serait possible que vers 2050, à condition qu'une vraie volonté politique se dégage. Ne vaut-il pas mieux continuer à envoyer des robots ?
Réponse du planétologue François Forget : C'est un vieux débat, [...] les robots ne sont pas forcément plus efficaces que les humains. Par exemple, un géologue peut repérer en quelques secondes une pierre intéressante, alors qu'il faudra des jours pour la repérer en manœuvrant un rover depuis la Terre, vu que les signaux radio mettent 5 à 22 minutes entre les deux planètes. Mais il y a une alternative qui me plaît bien : envoyer des humains en orbite martienne sans qu'ils se posent à la surface. Il est en effet très difficile — et donc coûteux — de poser des charges de plus d'une tonne sur Mars. Parce que l'atmosphère y est trop fine pour freiner correctement avec un parachute comme sur Terre, et trop épaisse pour ralentir juste au-dessus de la surface avec de simples rétrofusées comme sur notre Lune. Autre avantage : plus besoin de MAV (Mars Ascent Vehicle) pour remonter, ni d'habitat en surface. Au final, depuis l'orbite, les astronautes pourraient facilement aller se poser sur les petites lunes Phobos ou Deimos (qui n'ont presque pas de gravité), et surtout piloter en quasi temps réel des robots sophistiqués envoyés sur Mars elle-même. Une telle mission pourrait avoir lieu dès 2035.

B.1 En utilisant l'extrait du *CNRS Le Journal*, proposer une estimation de la distance de Mars au Soleil. On pourra s'aider d'un graphique représentant la trajectoire de Mars et de la Terre autour du Soleil en supposant que celles-ci sont circulaires.

B.2 Sachant que la période de révolution de Mars est $T_M = 687\,\text{jours}$, calculer la valeur de a_M. Celle valeur est-elle en accord avec les propos rapportés par l'extrait d'article précédent ? Retrouver également une estimation de la masse du Soleil.

Pour la suite, on prendra $a_M = 228 \times 10^6\,\text{km}$.

B.3 Déterminer la valeur du champ de pesanteur sur Mars.

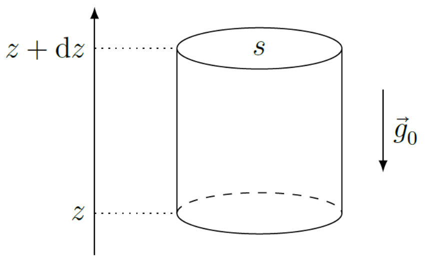
C Atmosphère martienne

L'atmosphère martienne est essentiellement constituée d'un mélange gazeux de dioxyde de carbone, d'argon et de diazote. On assimile ces constituants à un gaz parfait unique de masse molaire $M = 43{,}3\,\text{g}\,\text{mol}^{-1}$, à la pression P et à la température T. Dans cette sous-partie, le champ de pesanteur est supposé uniforme, de valeur égale à sa valeur au sol ($z = 0$) : $g_0 = 3{,}71\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

C.1 Retrouver à l'aide des données l'ordre de grandeur de la masse molaire M.

C.2 On note ρ la masse volumique d'un gaz parfait. Exprimer ρ en fonction de P, T, M et R.

On se place dans le cadre du modèle de l'atmosphère isotherme à la température $T = T_0 = 210\,\text{K}$ (T_0 est la température de surface moyenne martienne). On considère une petite colonne de gaz parfait à l'équilibre mécanique, de sections égales s comprises entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$. L'axe vertical est pris ascendant (figure ci-dessous).



C.3 Montrer que la pression atmosphérique P ne dépend que de z et l'exprimer en fonction de P_0 (la pression atmosphérique martienne au sol), g_0, M, z, R et T_0.

C.4 Au fond du bassin d'*Hellas Planitia* (altitude $z = -9{,}5 \times 10^3\,\text{m}$, point le plus bas de la planète, la pression atmosphérique vaut $P_1 = 1{,}15 \times 10^3\,\text{Pa}$. Calculer la valeur de la pression P_0 et la comparer à la valeur de la pression atmosphérique terrestre au niveau du sol ($P_{0T} = 1{,}0 \times 10^5\,\text{Pa}$).

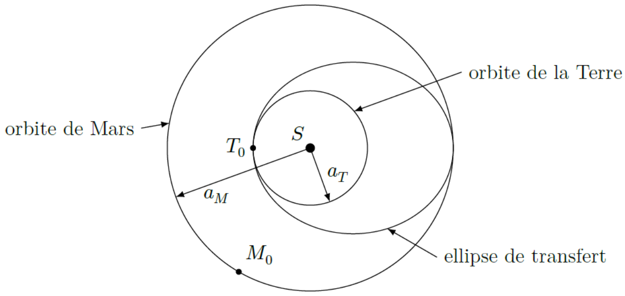
C.5 En déduire l'expression littérale de la masse volumique ρ de l'atmosphère martienne en fonction de P_0, g_0, M, z, R et T_0. On notera ρ_0 la masse volumique au sol ($z = 0$), grandeur à exprimer en fonction de P_0, M, R et T_0. Calculer numériquement ρ_0.

C.6 On relève une pression sur le sol martien $P_0 = 8{,}0 \times 10^2\,\text{Pa}$. Comparer cette valeur à celle calculée à la question C.4. Quelle(s) hypothèse(s) du modèle pourrait-on remettre en cause pour expliquer l'écart entre les valeurs mesurée et calculée de P_0 ?

C.7 Définir par analyse dimensionnelle la distance caractéristique de variation de la pression sur Mars et sur la Terre dans le cas d'une atmosphère isotherme. Calculer numériquement ces distances et le comparer (On donne pour la Terre $T_0 = 285\ K$ et $g_{0T} = 9{,}81\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$).

D Trajectoire du vaisseau Hermes

Dans cette partie, on se place dans le référentiel de Kepler. Le vaisseau Hermès est utilisé pour les trajets Terre-Mars au cours desquels le vaisseau n'est soumis qu'à l'attraction du Soleil. L'orbite de transfert utilisée est une orbite de transfert de Hohmann : ellipse dont le périhélie est un point de l'orbite de la Terre et l'aphélie un point de l'orbite de Mars (figure ci-dessous). On supposera, pour simplifier, que les orbites de la Terre et de Mars sont circulaires de rayons respectifs a_T et a_M.



D.1 Déterminer le demi grand axe a de l'ellipse de transfert.

On considère le transfert du vaisseau de la Terre vers la planète Mars, les positions initiales de la Terre et de Mars étant notées respectivement T_0 et M_0.

D.2 Déterminer la durée du transfert. En déduire la position de Mars au moment du lancement sur Terre (M_0) (décalage angulaire en degrés). En déduire également la position de la Terre au moment de l'arrivée du vaisseau à proximité de Mars (les positions de la Terre et de Mars seront à ce moment là notées respectivement T_1 et M_1).

D.3 Une fois le vaisseau arrivé au voisinage de la planète Mars (M_1, T_1), combien de temps faut-il attendre pour envisager un transfert d'Hohmann permettant de ramener le vaisseau à proximité de la Terre ? On notera T_2 et M_2 les positions respectives de la Terre et de Mars au début de ce second transfert.

D.4 Représenter les points T_0, M_0, T_1, M_1, T_2 et M_2, ainsi que les orbites d'aller et de retour, sur un schéma reproduisant la figure ci-dessus.

D.5 En déduire qu'une mission aller-retour vers Mars dure au minimum 972 jours.

Problème 2 Attraction gravitationnelle

La troisième partie de ce problème est indépendante des deux premières

On considère dans ce problème que la Terre possède une répartition de masse à symétrie sphérique, de centre O, de masse M_T et de rayon R_T. On pourra donc considérer que le champ gravitationnel créé par la Terre en un point M, extérieur à la Terre, est identique à celui créé par une masse ponctuelle M_T placée en O.

A Satellite en mouvement autour de la Terre

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite S de masse m placé dans le champ gravitationnel terrestre. On néglige les frottements.

A.1 Rappeler l'expression du champ gravitationnel $\overrightarrow{g(M)}$ créé par la Terre en un point M de l'espace. On notera G la constante de gravitation universelle et on exprimera $\overrightarrow{g(M)}$ en fonction de G, M_T, r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Caractéristiques du mouvement du satellite autour de la Terre

A.2 On se place dans le référentiel, considéré comme galiléen, qui a pour origine le centre de la Terre et ses trois axes dirigés vers « trois étoiles fixes ». Quel est le nom de ce référentiel ?

A.3 Déterminer l'expression de la force $\overrightarrow{f}$ à laquelle le satellite est soumis. On exprimera $\overrightarrow{f}$ en fonction de m, G, M_T, r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera. Quelle est l'expression de la force $\overrightarrow{f'}$ à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite.

A.4 En appliquant le théorème du moment cinétique, montrer que le mouvement du satellite est nécessairement plan. Sachant qu'à l'instant $t = 0$, le satellite se trouve au point M_0 et a une vitesse v_0, préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r et d'altitude h autour de la Terre (avec $r = h + R_T$) et on utilisera les coordonnées cylindriques.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, un point quelconque étant repéré par ses coordonnées (r, θ, z). Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine O (centre de la Terre) et les vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

A.5 Rappeler l'expression du vecteur position en coordonnées cylindriques et retrouver les expressions des vecteurs vitesse et accélération.

A.6 En appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que le module v de la vitesse du satellite S est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de G, M_T et r.

A.7 Déterminer l'expression de la période T du mouvement de rotation de S autour de la Terre en fonction de v et de r puis en fonction de G, M_T et r. En déduire la troisième loi de Kepler.

A.8 Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre. Donner sans justification l'ordre de grandeur de la masse de la Terre.

A.9 Un autre satellite S', de masse m', en orbite circulaire autour de la Terre à une trajectoire de rayon r égal au rayon de la trajectoire de S . Les deux satellites tournent dans le même plan. S et S' risquent-ils de se heurter au cours de leur mouvement ? On justifiera la réponse apportée.

B Étude énergétique

La force à laquelle le satellite S est soumis dérive d'une énergie potentielle E_p telle que E_p peut s'écrire sous la forme $E_p = -\frac{\alpha}{r}$ avec α une constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

On ne se limite pas dans cette partie à un mouvement circulaire mais dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite.

On notera C la constante des aires données par : $C = r^2\dot{\theta}$.

B.1 Déterminer l'expression de α en fonction des données du problème.

B.2 Déterminer l'expression de l'énergie mécanique E_m du satellite S en fonction de m, r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et α.

B.3 En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de m, C, r et α. Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de r. En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

B.4 Déterminer l'énergie mécanique E_{mc} associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c, en fonction de r_c, m, G et M_T.

B.5 Déterminer la première vitesse cosmique v_1, vitesse du satellite sur une orbite basse de rayon R_T autour de la Terre en fonction de R_T, G et M_T.

C Mesure de l'intensité du champ de pesanteur terrestre en un point

Un expérimentateur désire mesurer l'intensité du champ de pesanteur terrestre à la surface de la Terre. Il va pour cela utiliser tour à tour deux types de pendule.

C.1 Quelle est la différence entre le champ de gravitation et le champ de pesanteur ?

Utilisation d'un pendule sans ressort de rappel

Le pendule considéré est composé par une tige rigide de masse négligeable et de longueur ℓ et d'un point matériel M de masse m accroché à la tige. Ce pendule peut effectuer des mouvements de rotation dans le plan vertical (Oxy), autour de l'axe horizontal (Oz). La position de M est repérée par l'angle θ entre la droite OM et la verticale descendante. L'étude sera menée dans le référentiel terrestre considéré comme galiléen.

Les frottements seront négligés. Le pendule ainsi décrit se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{g}$ tel que $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{e_x}$.

C.2 En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ au cours du temps. En déduire la période T des petites oscillations du pendule autour de sa position d'équilibre, repérée par $\theta = 0$. On exprimera T en fonction de ℓ et g.

C.3 On souhaite étudier l'influence d'une variation d'intensité Δg du champ de pesanteur sur la période du pendule. Pour cela on définit la sensibilité s du pendule comme le rapport $s = \frac{\Delta T}{T}$ où ΔT représente une variation infiniment petit de la période du pendule engendrée par une variation infiniment petite Δg du champ de pesanteur. Déterminer l'expression de s en fonction de Δg et g.

Utilisation d'un pendule avec ressort spiral de rappel

Le pendule précédent est maintenant soumis à l'action d'un ressort spiral qui exerce un couple de rappel $M = -K\theta$ sur le pendule où K est une constante positive. La position du pendule est repérée par l'angle θ entre la droite (OM) et la verticale ascendante. Les frottements seront toujours négligés et l'étude sera menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Le pendule se trouve dans le champ de pesanteur terrestre caractérisé par le vecteur $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_x}$.

L'énergie potentielle du ressort spirale ne dépend que de l'angle θ et de la constante K et est donnée par l'expression $E_p(\theta) = \frac{1}{2}K\theta^2$.

C.4 Exprimer l'énergie mécanique totale E_m du système pendule-ressort en fonction de K, θ, m, ℓ, g et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.

C.5 En déduire l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

C.6 En considérant que l'angle θ reste petit, déterminer la condition à vérifier pour que la position $\theta = 0$ soit une position stable d'un oscillateur harmonique. La relation sera donnée sous forme d'une relation entre K, m, g et ℓ. Déterminer dans ce cas la période T des petites oscillations en fonction de K, m, g et ℓ.

C.7 On considère que la condition de la question précédente est vérifiée. On souhaite étudier la sensibilité $s_1 = \frac{\Delta T}{T}$ de ce pendule à une variation Δg du champ de pesanteur. Déterminer l'expression de la sensibilité s_1 en fonction de Δg, K, g ℓ et m.

C.8 Montrer que l'on peut choisir la constante K de telle sorte que le deuxième pendule soit plus sensible que le premier et permette ainsi de détecter des variations plus faible du champ de pesanteur terrestre. Exprimer cette condition sous forme d'une relation entre K, g, m et a.