Problème 2 : Propulsion d'une sonde…

I. Pression de radiation

1) Energie d'un photon :

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

Analyse dimensionnelle : avec $p = m.v$ pour un objet de masse m et de vitesse v :

$$[p] = [m.v] = M.L.T^{-1}$$

$$[p] = \frac{[E]}{[c]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{L.T^{-1}} = M.L.T^{-1}$$

On vérifie que la relation proposée est homogène.

2) Par analyse dimensionnelle, le nombre δN de photons qui se réfléchissent sur la voile entre t et $t + \delta t$ est donné par :

$$\delta N = \left(\frac{I_s S dt}{h\nu}\right)\cos\beta = \frac{I_s S dt \lambda \cos\beta}{hc}$$

avec $\cos\beta$ facteur multiplicatif résultant de la projection du faisceau incident sur la surface inclinée.

3) La variation de quantité de mouvement d'un photon par réflexion sur la surface S est :

$$\Delta\vec{p}_{ph} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = -\frac{2h\nu\cos\beta}{c}\vec{u}_x$$

avec $\vec{u}_x$ vecteur unitaire orienté dans la direction de l'axe Ox

La variation de la quantité de mouvement de δN photons qui percutent la surface S entre t et $t + \delta t$ est :

$$\Delta\vec{p}_{\delta N} = (\Delta\vec{p}_{ph})\delta N = -\frac{2I_s S dt \cos^2\beta \vec{u}_x}{c} = -\vec{F}_r dt$$

Avec $\vec{F}_r$ force de radiation exercée par les δN photons sur la surface S.

Posons $\vec{F}_r = p_r S\vec{u}_x$:
On vérifie que la pression de radiation est donnée par :

$$p_r = \frac{2I_s\cos^2\beta}{c}$$

4) Sous incidence normale ($\beta = 0$) la force de radiation exercée sur la voile solaire de surface S est donnée par :

$$F_r = \frac{2I_s S}{c}$$

A.N. : $F_r = 1{,}57\ mN$
Le résultat obtenu est dans l'ordre de grandeur de la valeur mesurée.

II. Voile solaire orthogonale au rayonnement solaire

5) On assimile la sonde à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Dans ce référentiel, la sonde est soumise uniquement à la force gravitationnelle exercée par le Soleil. Appliquons le principe fondamental de la dynamique à M :

$$m.\vec{a}(M) = \vec{F}$$

En supposant que M décrive une trajectoire circulaire, en explicitant dans la base de coordonnées polaires et en projetant sur $\vec{u}_r$:

$$-m.R_T.\omega_T^2 = -\frac{GmM_s}{R_T^2}$$

On établit que $R_T^3 \omega_T^2 = G.M_s$ et on reconnait la 3[è] loi de Kepler.
La vitesse de la sonde en orbite circulaire de rayon R_T est $v_T = R_T.\omega_T$. En explicitant :

$$v_T = \sqrt{\frac{GM_S}{R_T}}$$

6) Déterminons la fonction énergie potentielle totale du système. Pour cela, posons :

$$\delta w = \vec{F}.\overrightarrow{dl} = -dE_{ptot}$$

Avec :

$$\vec{F} = -\frac{GmM_S}{r^2}\vec{u}_r + p_T\frac{SR_T^2}{r^2}\vec{u}_r$$

En explicitant, on établit que :

$$\frac{dE_{ptot}}{dr} = \frac{GmM_S}{r^2} - p_T\frac{SR_T^2}{r^2}$$

En primitivant :

$$E_{ptot}(r) = -\frac{GmM_S}{r} + p_T\frac{SR_T^2}{r} + \text{cte}$$

Si on fait l'hypothèse que l'énergie potentielle est nulle à l'infini : $E_{ptot}(\infty) = \text{cte} = 0$:

$$E_{ptot}(r) = -\frac{GmM_S}{r} + p_T\frac{SR_T^2}{r}$$

7) Energie mécanique de la sonde exprimée dans la base de coordonnées polaires :

$$E_m = E_C + E_{ptot}(r)$$

Avec :

$$E_C = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$$

En explicitant :

$$E_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) - \frac{GmM_S}{r} + p_T\frac{SR_T^2}{r}$$

8) Posons $\dot{\theta} = C/r^2$:

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_S}{r} + p_T\frac{SR_T^2}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r)$$

Par identification :

$$E_{p,eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{GmM_S}{r} + p_T\frac{SR_T^2}{r}$$

9) Déterminons la dérivée de la fonction $E_{p,eff}(r)$:

$$\frac{dE_{p,eff}(r)}{dr} = -\frac{mC^2}{r^3} + \frac{1}{r^2}\left(GmM_S - p_T SR_T^2\right)$$

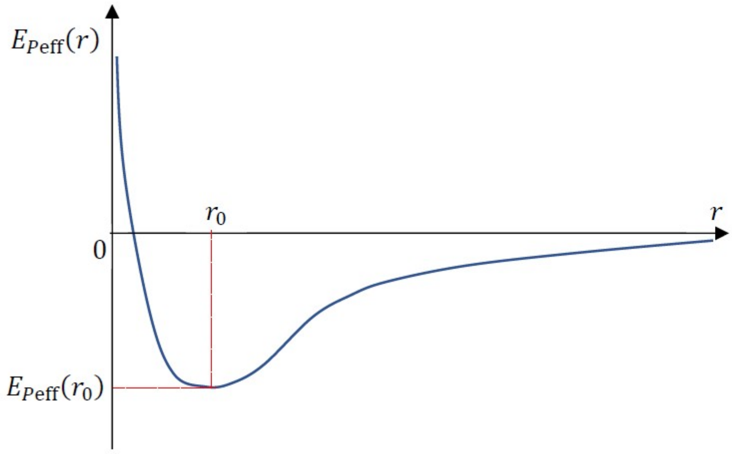
La fonction $E_{p,eff}(r)$ admet un extrémum si sa dérivée s'annule. Ceci n'est possible que si :

$$GmM_S - p_T SR_T^2 > 0$$

Il faut donc que :

$$S < S_{lim} = \frac{GmM_S}{p_T R_T^2}$$

Allure de la fonction $E_{p,eff}(r)$ pour $S < S_{lim}$:



Soumise à une force proportionnelle à $1/r^2$ on montre que la trajectoire de la sonde est une conique (cf cours de mécanique)

10) A l'instant $t = 0$:

$$E_m(0) = \frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{GmM_S}{R_T} + p_T S R_T$$

En explicitant :

$$E_m(0) = -\frac{GmM_S}{2R_T} + p_T S R_T$$

Sachant que le système est conservatif :

$$E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + E_{p,eff}(r) = E_m(0)$$

Pour que la sonde puisse atteindre l'infini, il faut que $E_m \geq 0$. Soit $E_m(0) \geq 0$. A la limite :

$$E_m(0) = 0$$

En explicitant :

$$-\frac{GmM_S}{2R_T} + p_T S_{min} R_T = 0$$

Soit :

$$S_{min} = \frac{GmM_S}{2p_T R_T^2}$$

On constate que $S_{min} = S_{lim}/2$ donc :

$$S_{lim}/2 < S < S_{lim}$$

A.N. : $S_{min} = 18{,}4.10^3 m^2$