PCSI 1 et 3 — 2024-2025

Éléments de correction du DM n° 11

Thermodynamique – Mécanique

Problème 1 Rosetta

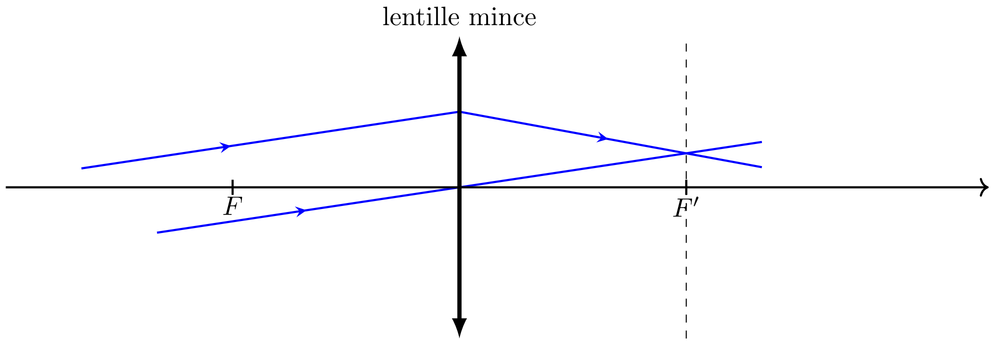
A Instrumentation à bord de Rosetta : OSIRIS

Questions préliminaires

A.1 Conditions de Gauss : Les rayons lumineux doivent être peu inclinés et peu écartés de l'axe optique. Il est souhaitable d'utiliser les instruments d'optique dans les conditions de Gauss pour obtenir un stigmatisme et un aplanétisme approchés.

A.2 Le foyer objet est le point objet de l'axe optique telle que son image est rejetée à l'infini sur l'axe. Le foyer image est l'image d'un point objet situé à l'infini sur l'axe optique.

A.3 Pour une lentille convergente les foyers objet et images sont réels. On trace un rayon parallèle a rayon incident passant par O. On simule alors un objet à l'infini et son image se trouve à l'intersection du plan focal image et du rayon passant par O.



Détection de la comète

A.4 La distance entre la comète et Rosetta étant très grande (10^6 km) devant la distance focale de la caméra (132 mm), on peut considérer que la comète est à l'infini. Son image se formera donc dans le plan focal image de la lentille. Le capteur CCD doit donc être dans le plan focal image de la lentille.

A.5 Le diamètre angulaire de la comète est $\theta = \frac{D_c}{d_{sc}} = 4 \cdot 10^{-6}$ rad. La taille de l'image est donc $h = \theta f' = 0,5$ μm. La taille d'un pixel est bien supérieur à la valeur obtenue (13,5 μm).A une distance $d_{rc} = 10^6$ km, la taille de l'image géométrique de la comète est donc inférieure à 1 pixel.

A.6 L'image d'un point objet à l'infini, du fait de la diffraction est une tache de rayon angulaire $\theta \approx \sin\theta = 1,22\frac{\lambda}{D}$, soit une tâche dans le plan focal image de diamètre $\boxed{d = 2,44\frac{\lambda f'}{D} = 2,44\lambda N.O.}$. Pour une longueur d'onde maximale de 720 nm, on obtient $d = 9,8$ μm, ce qui est toujours inférieur à la taille d'un pixel.

A.7 D'après les données l'albedo du noyau est $r = 4\%$ La puissance lumineuse réfléchie par la comète s'écrit alors $P_e = rP_i = rFS\frac{1}{R_{sc}^2}$. L'application numérique donne $P_e = 6,3.10^7$ W.

A.8 La puissance reçu au niveau du capteur CCD dépend du diamètre du diaphragme de la puissance surfacique I_r et du facteur de transmission T. $\boxed{P_{CCD} = TI_r\pi\frac{D^2}{4} = 3 \cdot 10^{-15} \text{ W.m}^{-2}}$.

A.9 Le nombre de photons par seconde $\dot{N}$ correspondant à cette puissance est donnée par la relation $\dot{N}h\nu = P_{CCD}$ où $\nu = \frac{c}{\lambda}$ L'application numérique donne $\dot{N} = 8.10^3$ s^{-1} pour $\lambda = 500$ nm.

A.10 Avec une durée d'acquisition de 1s/image, $N = 8.10^3$ photons arrivent sur un pixel. Le rapport signal sur bruit est alors $\boxed{\frac{S}{B} = \sqrt{N} = 90}$, ce qui est supérieur à 10 comme demandé. La comète est bien détectée par la caméra WAC.

B Navigation spatiale de la sonde Rosetta

Questions préliminaires

B.1 $\overrightarrow{\mathcal{G}} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ où $\overrightarrow{u_r}$ est le vecteur unitaire des coordonnées sphérique de centre O.

B.2 $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{\mathcal{G}_S} = -\frac{GM_s m}{r^2}\overrightarrow{u_r}$.

B.3 Cette force est conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi. $\delta W = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{d\ell} = -dE_p = -\frac{GM_S m}{r^2}dr$, soit $\boxed{E_p = -\frac{GM_s m}{r}}$ (On considère une énergie potentielle nulle lorsque $r \longrightarrow \infty$).

B.4 On applique le théorème du moment cinétique à l'astre dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen de centre O. On suppose que la seule force qui s'exerce sur l'astre est la force de gravitation du Soleil. On alors $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})$. La force $\overrightarrow{F}$ étant centrale son moment par rapport au point O est nul et le moment cinétique de l'astre par rapport à O est constant. Les conditions initiales $\overrightarrow{OM_0}$ et $\overrightarrow{v_0}$ fixe la valeur de $\overrightarrow{L_O}$ qui par définition du produit vectoriel est perpendiculaire à $\overrightarrow{OM_0}$ et à $\overrightarrow{v_0}$. Ensuite $\forall t$, on conserve $\overrightarrow{OM}(t) \perp \overrightarrow{L_O}$ et $\overrightarrow{v}(t) \perp \overrightarrow{L_O}$ ce qui montre que le mouvement reste dans un plan défini par sa normale $\overrightarrow{L_O}$.

B.5 On considère la Terre dans le référentiel héliocentrique. Si son mouvement est circulaire on peut déterminer ses grandeurs cinétiques en coordonnées polaires : $\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r} + R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. La terre étant soumise qu'à la force d'attraction du Soleil, l'application de la projection de la deuxième loi de Newton suivant $\overrightarrow{u_r}$ conduit à : $-M_T\frac{v^2}{R} = -\frac{GM_SM_T}{R^2}$ soit $\boxed{v = \sqrt{\frac{GM_S}{R}} = 30 \text{ km.s}^{-1}}$

B.6 La Terre tourne autour du Soleil en 365,25 jours. La pulsation $\omega = \dot{\theta}$ est alors de $2{,}0.10^{-7}$ s^{-1}. La vitesse de la Terre s'écrit alors $v = R\omega = 30$ km.s^{-1}. On retrouve le même résultat qu'à la question précédente.

Budget énergétique pour transfert orbital

B.7 En transposant le raisonnement de la question **??**, on obtient $v_1 = \sqrt{\frac{GM_s}{R_1}}$.

B.8 L'énergie mécanique sur l'orbite de transfert elliptique juste après la variation de vitesse Δv_1 s'écrit $E_m = \frac{1}{2}m(v_1+\Delta v_1)^2 - \frac{GM_Sm}{R_1}$. En utilisant l'expression de l'énergie mécanique sur l'orbite elliptique (qui est une constante) on obtient $(v_1+\Delta v_1)^2 = \frac{2GM_S}{R_1}\left(1 - \frac{R_1}{R_1+R_2}\right)$ soit $\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - v_1$ soit $\boxed{\Delta v_1 = \sqrt{\frac{GM_S}{R_1}}\left(\sqrt{\frac{2R_2}{R_1+R_2}} - 1\right)}$

B.9 On fait l'application numérique pour $R_1 = 1$ ua et $R_2 = 6$ ua. On obtient alors $\Delta v_1 = 9$ km.s^{-1} (1 CS puisque R_1 est donné avec 1CS)

Utilisation de l'assistance gravitationnelle

B.10 On se place dans le référentiel géocentrique. La conservation de l'énergie mécanique impose $\frac{1}{2}mV_1^2 = \frac{1}{2}mV_2^2$ (énergie potentielle nulle puisque hors de la zone d'influence gravitationnelle de la Terre), soit $V_1 = V_2 = V$.

B.11 $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{v_T} = V\overrightarrow{u_x} + v_T\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{v_T} = V\cos\theta\overrightarrow{u_x} + (V\sin\theta + v_T)\overrightarrow{u_y}$.

B.12 $\Delta v = v_2 - v_1 = \sqrt{V^2\cos^2\theta + (V\sin\theta + v_T)^2} - \sqrt{V^2 + v_T^2}$. Soit :
$\boxed{\Delta v = \sqrt{V^2 + v_T^2}\left(\sqrt{1 + \frac{2Vv_T}{V^2+v_T^2}\sin\theta} - 1\right)}$. L'application numérique donne $\Delta v = 3$ km.s^{-1}.

B.13 L'assistance gravitationnelle permet donc d'augmenter la vitesse de la sonde (dans le référentiel héliocentrique) sans avoir à utiliser de carburant. En contre-partie, il faut synchroniser la trajectoire de la sonde avec celles des planètes qui seront utilisées...ce qui augmente la durée du voyage de la sonde.

Problème 2 Sous-marin

A Relation entre pression et profondeur dans l'eau de mer

A.1 Cf. cours

A.2 En intégrant la relation fondamentale de la statique des fluides on obtient :
$P(z) = P_0 - \rho gz$.
A 300 m de profondeur : $\boxed{P(z = -300) = P_{300} = 31,3.10^5\ Pa}$.

B Utilisation des ballasts

B.1 Le sous marin est en équilibre. Son poids est compensé par la résultante des forces de pression exercées par l'eau de mer : $Mg = \rho_0 V_{imm} g$ donc $\boxed{M = \rho_0 V_{imm}}$.

B.2 $\boxed{\frac{V_{imm}}{V} = \frac{M}{\rho_0\pi R^2L} = 87,1\%}$.

B.3 Lorsque l'air est remplacé par l'eau, le poids du sous-marin augmente. La poussée d'Archimède reste constante car le volume du sous-marin ne varie pas. Le sous-marin s'enfonce dans l'eau.

B.4 Lorsque le sous-marin est totalement immergé et que les ballasts sont remplis d'eau : $(M+\rho_0V_b)g = \rho_0Vg$.
On obtient donc $\boxed{V_b = \frac{\rho_0V - M}{\rho_0} = 2,02.10^3\ m^3}$.

B.5 La coque intérieure est soumise d'un côté aux forces de pression exercées par l'air du sous-marin à la pression atmosphérique et de l'autre côté aux forces de pression exercées par l'eau à une pression plus élevée. La coque doit donc être suffisamment résistante pour ne pas céder sous l'effet de la surpression due à l'eau.
La coque extérieure subit des forces de pression identiques de chaque côté. Elle peut donc être plus légère.

Problème 3 Étude d'une turbine à combustion

A Préliminaires

A.1 Soit Σ_0, le système ouvert associé à une surface de contrôle fixe. On définit un système **fermé** Σ tel que :
- $\Sigma(t) = \Sigma_0(t) \cup \Sigma_e$ où Σ_e est la quantité de fluide entrant dans Σ_0 entre t et $t + dt$;
- $\Sigma(t + dt) = \Sigma_0(t + dt) \cup \Sigma_s$ où Σ_s est la quantité de fluide sortant de Σ_0 entre t et $t + dt$;

Pour le système fermé Σ,
- à l'instant t, $m_\Sigma(t) = m_{\Sigma 0}(t) + \delta m_e$ où δm_e est la masse de fluide entrant dans Σ_0 entre t et $t + dt$;
- à l'instant $t + dt$, $m_\Sigma(t + dt) = m_{\Sigma 0}(t + dt) + \delta m_s$ où δm_s est la masse de fluide sortant de Σ_0 entre t et $t + dt$;.

Comme la masse du système fermé se conserve, $m_\Sigma(t) = m_\Sigma(t + dt)$ soit $m_{\Sigma 0}(t) + \delta m_e = m_{\Sigma 0}(t + dt) + \delta m_s$. Comme l'on est en régime permanent, $m_{\Sigma 0}(t) = m_{\Sigma 0}(t + dt)$ donc

$$\delta m_e = \delta m_s = \delta m$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique au système Σ entre les instants t et $t + dt$, on a

$$dU + dE_c + dE_p = \delta W' + \delta Q$$

avec
- dU, variation d'énergie interne de Σ : $dU = U_\Sigma(t+dt) - U_\Sigma(t)$. Comme l'énergie interne est une grandeur extensive, $dU = U_{\Sigma 0}(t+dt) + \delta m u_s - U_{\Sigma 0}(t) - \delta m u_e$. Comme $U_{\Sigma 0}(t+dt) = U_{\Sigma 0}(t)$ (régime stationnaire), on en déduit que $dU = \delta m(u_s - u_e)$ où u est l'énergie interne massique du fluide.
- dE_c, variation d'énergie cinétique de Σ : par les mêmes arguments que précédemment, on a $dE_c = Ec_\Sigma(t + dt) - Ec_\Sigma(t) = Ec_{\Sigma 0}(t + dt) + \delta m e_{c,s} - U_{\Sigma 0}(t) - \delta m e_{c,e} = \delta m(e_{c,s} - e_{c,e})$ où e_c est l'énergie cinétique massique du fluide.
  Comme $e_c = \frac{1}{2}c^2$, on a $dE_c = \delta m \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2)$.
- dE_p, variation d'énergie potentielle de Σ : par les mêmes arguments que précédemment, on a $dE_p = Ep_\Sigma(t + dt) - Ep_\Sigma(t) = Ep_{\Sigma 0}(t + dt) + \delta m e_{p,s} - Ep_{\Sigma 0}(t) - \delta m e_{p,e} = \delta m(e_{p,s} - e_{p,e})$ où e_p est l'énergie potentielle massique du fluide.
  Dans la configuration proposée, e_p se réduit à l'énergie potentielle de pesanteur : $e_p = gz$ donc $dE_p = \delta m g(z_s - z_e)$.
- $\delta W' = \delta W + \delta W_{transvasement}$, le travail des forces non conservatives reçu par le fluide est la somme du travail reçu par le fluide à l'intérieur de la machine $\delta W = \delta m w$ et du travail de transvasement (travail des forces de pression en amont et en aval).
- $\delta Q = \delta m q$, transfert thermique reçu par le fluide.

Calcul de $\delta W_{transvasement}$

$\delta W_{transvasement}$ est le travail des forces de pression en amont et en aval : $\delta W_{transvasement} = \delta W_{amont} + \delta W_{aval}$.

En amont, la pression est égale à P_e donc $\delta W_{amont} = -P_e \Delta V_{amont}$. En amont, la masse δm de fluide occupe à t, un volume $\delta m v_e$ et à $t + dt$, un volume nul (avec v_e, volume massique du fluide en amont). Ainsi, $\Delta V_{amont} = V(t + dt) - V(t) = 0 - \delta m v_e$. On a donc $\delta W_{amont} = P_e v_e \delta m > 0$: le gaz en amont fournit du travail au gaz du système Σ.

En aval, la pression est égale à P_s donc $\delta W_{aval} = -P_s \Delta V_{aval}$. En aval, la masse δm de fluide occupe à t, un volume nul et à $t + dt$, un volume égal à $\delta m v_s$ (avec v_s, volume massique du fluide en aval). Ainsi, $\Delta V_{aval} = V(t+dt) - V(t) = \delta m v_s - 0$. On a donc $\delta W_{aval} = -P_s v_s \delta m < 0$, ce qui correspond bien à une détente.

Finalement, $\delta W_{transvasement} = -P_s v_s \delta m + P_e v_e \delta m$ soit

$$\delta W_{transvasement} = \delta m(P_e v_e - P_s v_s)$$

Finalement, $\delta m(u_s - u_e + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2) + g(z_s - z_e)) = \delta m w + \delta m(P_e v_e - P_s v_s) + \delta m q$. Avec $h = u + Pv$, enthalpie massique, on a

$$\left[(h_s - h_e) + \frac{1}{2}(c_s^2 - c_e^2) + g(z_s - z_e)\right] = q + w$$

A.2 On néglige les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur donc

$$[(h_s - h_e)] = q + w$$

Si le fluide est parfait, $h_s - h_e = c_{pm}(T_s - T_e)$ donc

$$c_{pm}(T_s - T_e) = q + w$$

A.3 On a $\gamma = \frac{c_{pm}}{c_{vm}}$. De plus, comme le fluide est parfait, $C_p = C_v + nR$ soit $c_{pm} = c_{vm} + \frac{R}{M}$.
On en déduit que $c_{vm} = \frac{R}{M(\gamma-1)}$ et $c_{pm} = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}$

A.4 **Application numérique :** $c_{pm} = 1,0.10^3\ J.K^{-1}.kg^{-1}$ et $c_{vm} = 7,2.10^2\ J.K^{-1}.kg^{-1}$.

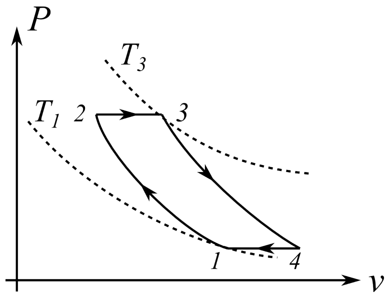


FIGURE 1 – Allure du cycle en diagramme de Clapeyron

B Modélisation idéale du cycle : cycle de Joule

B.1 On trace l'allure du cycle :

L'aire du cycle est positive donc le travail reçu par le fluide sur un cycle est négatif : le cycle est moteur.

B.2 Le long d'une évolution isobare, $dP = 0$ donc $dS = mc_{pm}\frac{dT}{T}$ ou $ds = c_{pm}\frac{dT}{T}$. En intégrant entre l'état initial et l'éatat final de la transformation, on a $s_f - s_i = c_{pm}\ln\frac{T_f}{T_i}$.

On en déduit que $T_f = T_i\exp(\frac{s_f - s_i}{c_{pm}})$, ce qui montre qu'une évolution isobare se représente comme une exponentielle dans le diagramme (T, s).

C Détermination des grandeurs énergétiques

C.1 Entre les points 2 et 3, l'air échange de la chaleur avec un fluide extérieur dans un échangeur de chaleur isobare donc $w_{23} = 0$. Ainsi, on a $q_{23} = h_3 - h_2$ soit $q_{23} = c_{pm}(T_3 - T_2)$.

De même, entre les points 4 et 1, l'air échange de la chaleur avec l'extérieur dans un échangeur de chaleur isobare donc $w_{41} = 0$. Ainsi, on a $q_{41} = c_{pm}(T_1 - T_4)$.

C.2 Entre les points 1 et 2, l'air subit une compression isentropique i.e. adiabatique réversible donc $q_{12} = 0$. Ainsi, on a $w_{12} = h_2 - h_1$ soit $w_{12} = c_{pm}(T_2 - T_1)$.

C.3 De même, entre les points 3 et 4, l'air subit une détente isentropique i.e. adiabatique réversible donc $q_{34} = 0$. Ainsi, on a $w_{34} = h_4 - h_3$ soit $w_{34} = c_{pm}(T_4 - T_3)$.

C.4 w_{net} est le travail récupéré sur l'arbre donc $w_{net} = -w_{cycle}$ où w_{cycle} est le travail reçu par le fluide sur le cycle. Comme $w_{cycle} = w_{12} + w_{34}$, $w_{net} = -(w_{12} + w_{34})$

C.5 En remplaçant w_{12} et w_{34} par leurs expressions, on a

$$w_{net} = c_{pm}(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$$

D Expression du rendement et optimisation

D.1 Le rendement η de l'installation est défini par $\eta = \frac{utile}{cout} = \frac{w_{net}}{q_{23}}$.

D.2 A partir des expressions précédents, on a $\eta = \frac{c_{pm}(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)}{c_{pm}(T_3 - T_2)}$ soit $\eta = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}$ ou $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}\frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1}$.

D'autre part, sur le cycle, $\Delta s_{cycle} = 0$ (l'entropie est une fonction d'état) avec $\Delta s_{cycle} = \Delta s_{12} + \Delta s_{23} + \Delta s_{34} + \Delta s_{41}$. Comme $\Delta s_{12} = 0$ et $\Delta s_{34} = 0$ (évolutions isentropiques), $\Delta s_{23} + \Delta s_{41} = 0$.

A partir de l'expression de $\Delta s_{isobare} = c_{pm}\ln\frac{T_f}{T_i}$ le long d'une évolution isobare , $\Delta s_{23} = c_{pm}\ln\frac{T_3}{T_2}$ et $\Delta s_{41} = c_{pm}\ln\frac{T_1}{T_4}$.

On en déduit que $\ln\frac{T_3}{T_2} + \ln\frac{T_1}{T_4} = 0$ soit $\frac{T_3}{T_2} = \frac{T_4}{T_1}$. Finalement, on a

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2}$$

D.3 L'évolution de 1 à 2 est une évolution isentropique subie par un gaz parfait, on peut donc appliquer les lois de Laplace : $P_1V_1^\gamma = P_2V_2^\gamma$ ou $P_1^{1-\gamma}T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma}T_2^\gamma$.

On a donc $\frac{T_1}{T_2} = (\frac{P_2}{P_1})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

On en déduit que $\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = 1 - \tau^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ soit

$$\eta = 1 - \frac{1}{\tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}$$

Par identification, $z = \tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$

D.4 Pour augmenter le rendement, on peut augmenter z et donc augmenter le taux de compression τ. Il faut également étudier le rôle de la nature du fluide (influence de la valeur de γ).

E Optimisation du travail récupéré sur l'arbre

E.1 On a $w_{net} = -w_{cycle}$ et $w_{cycle} = -\oint Pdv = -\mathscr{A}_{cycle,Pv}$ donc

$$w_{net} = \mathscr{A}_{cycle,Pv}$$

E.2 Comme les transformations sont réversibles, le second principe s'écrit $\delta q = Tds$ donc en intégrant sur le cycle, $q_{cycle} = \oint_{cycle} \delta q = \oint_{cycle} Tds = \mathscr{A}_{cycle,Ts}$ donc

$$q_{cycle} = \mathscr{A}_{cycle,Ts}$$

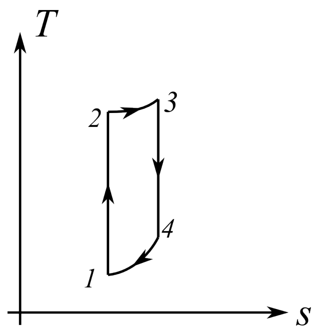
E.3 Le premier principe appliqué au fluide sur le cycle donne $\Delta h = q_{cycle} + w_{cycle} = 0$ donc $q_{cycle} = -w_{cycle} = w_{net}$.

Ainsi,

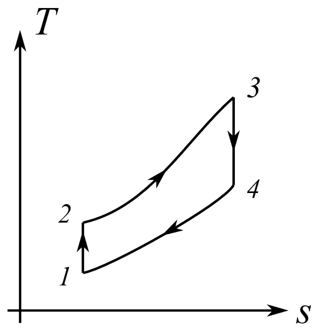
$$w_{net} = \mathscr{A}_{cycle,Ts}$$

E.4

a Rapport de compression tel que T_2 se rapproche de la valeur de T_3 : cycle étroit en largeur



b Rapport de compression tel que T_2 se rapproche de la valeur de T_1 : cycle étroit en hauteur



E.5 Dans les deux cas extrêmes, l'aire du cycle est faible (elle tend vers 0) et le travail récupéré également. Il existe donc un cycle intermédiaire tel que l'aire et donc le travail récupéré soient maximaux.

E.6 On a $\eta = \frac{w_{net}}{q_{23}} = 1 - \frac{1}{z}$ avec $q_{23} = c_{pm}(T_3 - T_2)$ donc $w_{net} = (1 - \frac{1}{z})c_{pm}(T_3 - T_2)$.

Or $T_2 = T_1(\frac{P_2}{P_1})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$, donc $T_2 = T_1\tau^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 z$.

On a donc $w_{net} = c_{pm}(1 - \frac{1}{z})(T_3 - zT_1)$

E.7 w_{net} maximal $\iff \frac{dw_{net}}{dz} = 0$. T_1 et T_3 étant fixées, on a $\frac{dw_{net}}{dz} = c_{pm}\left[(\frac{1}{z^2}(T_3 - zT_1) - (1 - \frac{1}{z})T_1\right] = c_{pm}(\frac{T_3}{z^2} - T_1)$, ce qui s'annule en $z^2 = \frac{T_3}{T_1}$.

w_{net} passe par un maximum pour

$$z_{max} = \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}$$

E.8 On a $w_{net,max} = w_{net}(z = z_{max})$ donc $w_{net,max} = c_{pm}(1 - \frac{1}{z_{max}})(T_3 - z_{max}T_1) = c_{pm}(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}})(T_3 - \sqrt{\frac{T_3}{T_1}}T_1)$ d'où

$$w_{net,max} = c_{pm}T_3(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_3}})^2$$

E.9 **Applications numériques :**

— $w_{net,max} = 2,0.10^5\ J.kg^{-1}$;

— $z_{max} = 1,8$ donc avec $T_2 = zT_1$, $T_2 = 5,5.10^2\ K$;

— $T_4 = \frac{T_1 T_3}{T_2}$ d'où $T_4 = 5,5.10^2\ K$;

— $\eta = 1 - \frac{1}{z_{max}}$ donc $\eta = 0,45$.

Problème 4 Un jeu d'enfant !

1. On considère le système {barre+enfants} dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le système est soumis aux poids des enfants s'exerçant en A et B et de la barre qui s'exerce en O ainsi qu'à la force de liaison s'exerçant en O. Le système est à l'équilibre si la somme des moments des forces par rapport au point O est nulle. Les moments de la force de liaison et du poids de la barre par rapport au point O sont nuls. Le moment du poids en A s'écrit $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P_A}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{P_A}$ avec $\overrightarrow{OA} = L\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{P_A} = -mg\sin\theta\overrightarrow{u_r} - mg\cos\theta\overrightarrow{u_\theta}$. On

obtient alors $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P_A}) = -mgL\cos\theta\overrightarrow{u_z}$. De la même façon, on calcule $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P_B})$ et on obtient $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P_B}) = +mgL\cos\theta\overrightarrow{u_z}$. On constate que la somme des moments est nulle quelle que soit l'angle θ, le système est donc toujours à l'équilibre.

2. balançoire de type trébuchet à ressort

2.a. Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ unitaire, orienté suivant la verticale ascendante, on a lors $\overrightarrow{u} = \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} + \sin\theta\overrightarrow{u_r}$. Les tensions des ressorts supposées verticales s'écrivent $\overrightarrow{T_1} = -k(\ell_1 - \ell_0)\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{T_2} = -k(\ell_2 - \ell_0)\overrightarrow{u}$. Les moments de ces forces par rapport au point O s'écrivent alors $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T_1}) = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{T_1} = -k(\ell_1 - \ell_0)L\cos\theta\overrightarrow{u_z}$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T_2}) = \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{T_2} = +k(\ell_2 - \ell_0)L\cos\theta\overrightarrow{u_z}$. En utilisant les expressions de ℓ_1 et ℓ_2, on obtient $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T_1}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T_2}) = -2kL^2\theta\cos\theta$. En utilisant l'approximation des petits angles le moment résultant des forces élastiques s'écrit $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T}) = -2kL^2\theta\overrightarrow{u_z}}$.

2.b. Par rapport au bilan des actions de la question 1 on ajoute les forces élastiques s'appliquant en A et B. La somme des moments des forces de pesanteur étant nulle, le système est à l'équilibre (somme des moments nulle) si $\theta = 0$.

2.c. Le moment cinétique du système $\{$barre+enfants$\}$ par rapport à l'axe (Oz) s'écrit $L_{Oz} = L_{Oz}(barre) + L_{Oz}(A) + L_{Oz}(B) = J\dot{\theta} + 2mL^2\dot{\theta}$. L'application du théorème du moment cinétique projeté sur l'axe (O_z) conduit à l'équation suivante : $(J + 2mL^2)\ddot{\theta} = -2kL^2\theta$ soit $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2kL^2}{J+2mL^2}\theta = 0}$

2.d. On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2kL^2}{J+2mL^2}}$ et de période $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{J+2mL^2}{2kL^2}}}$

2.e. L'énergie cinétique du système $\{$barre+enfants$\}$ s'écrit $E_c = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m(L\dot{\theta})^2$ soit $E_c = (\frac{1}{2}J + mL^2)\dot{\theta}^2$. L'énergie potentielle du système est la somme des énergies potentielles élastiques et de pesanteur. Sachant que l'énergie potentielle de pesanteur de A est compensée par celle de B, il ne reste que la somme des énergies potentielles élastiques : $E_p = \frac{1}{2}k(\ell_1 - \ell_0)^2 + \frac{1}{2}k(\ell_2 - \ell_0)^2$, soit, d'après les expressions de ℓ_1 et ℓ_2, $\boxed{E_p = kL^2\theta^2}$. L'énergie mécanique s'écrit alors : $\boxed{E_m = (\frac{1}{2}J + mL^2)\dot{\theta}^2 + kL^2\theta^2}$. Les forces s'exerçant sur ce système étant conservatives, l'énergie mécanique se conserve et est constante au cours du temps. Pour $\theta = \theta_{max}$, $\dot{\theta} = 0$ soit $E_m = kL^2\theta_{max}^2$.

2.f. On applique le théorème de l'énergie mécanique au système $\{$barre+enfants$\}$ dans le référentiel terrestre supposé galiléen. L'énergie mécanique étant constante, on a $\frac{dE_m}{dt} = 0$ soit $\dot{\theta}((J + 2mL^2)\ddot{\theta} + 2kL^2\theta) = 0$. La solution $\dot{\theta} = 0 \ \forall t$ correspond à une absence de mouvement. On retrouve alors l'équation obtenue précédemment : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2kL^2}{J+2mL^2}\theta = 0}$.

2.g. On considère l'enfant placé en A dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Il est soumis à son poids $\overrightarrow{P_A} = -mg\sin\theta\overrightarrow{u_r} - mg\cos\theta\overrightarrow{u_\theta}$ et à la réaction de la barre $\overrightarrow{R_A} = R_r\overrightarrow{u_r} + R\theta\overrightarrow{u_\theta}$. Son mouvement est circulaire de rayon L, son accélération s'écrit alors $\overrightarrow{a} = -L\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + L\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. La projection du principe fondamental de la dynamique suivant $\overrightarrow{u_r}$ donne $R_r = -mL\dot{\theta}^2 + mg\sin\theta$ et celle suivant $\overrightarrow{u_\theta}$ donne $R_\theta = mL\ddot{\theta} + mg\cos\theta$. D'après les questions précédentes $\ddot{\theta} = -\frac{2kL^2\theta}{J+2mL^2}$ et $\dot{\theta}^2 = \frac{2kL^2(\theta_{max}^2 - \theta^2)}{J+2mL^2}$. En considérant de petits angles on obtient alors $\boxed{R_r = mg\theta - mL\frac{2kL^2(\theta_{max}^2 - \theta^2)}{J+2mL^2}}$ et $\boxed{R_\theta = mg - mL\frac{2kL^2\theta}{J+2mL^2}}$.

2.h. L'enfant est susceptible de décoller si la réaction normale s'annule, soit pour $\theta = \frac{g(J+2mL^2)}{2kL^3}$. On peut vérifier quelques comportements cohérents. Plus la masse de l'enfant est importante, plus l'angle de décollage est important...