TD INDUCTION n° 3

Circuit fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

Capacités exigibles :
- Évaluer et connaître l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur ◐.
- Conduire un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent ✠.
- Déterminer l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en influence totale ⌑.
- Établir le système d'équation en régime sinusoïdal forcé en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent ⋈.

Exercice 1 Comparaison champ extérieur/champ induit ◐

Lorsque l'on considère une spire unique, on peut généralement négligé la f.e.m induite devant celle qui est due au champ « extérieur », c'est-à-dire créé par une autre bobine alimentée par un courant variable. On considère ici une spire circulaire de rayon $R = 5$ cm et de résistance interne $r = 1\ \Omega$. Le champ extérieur variable est uniforme, orthogonal au plan de la spire, sinusoïdal de fréquence $f = 50$ Hz et d'amplitude $B_0 = 50$ mT.

1. Calculer l'amplitude de la f.e.m. induite E_{ind} dans la spire du fait du champ extérieur.
2. En déduire (en négligeant l'auto-induction), l'amplitude du courant induit.
3. On donne l'expression $L = \mu_0 R(\ln\left(\frac{8R}{a}\right) - 2)$. Calculer L pour cette spire, avec $a = 0,1$ mm.
4. Calculer l'amplitude E'_{ind} de la f.e.m associé à l'auto-induction et conclure.

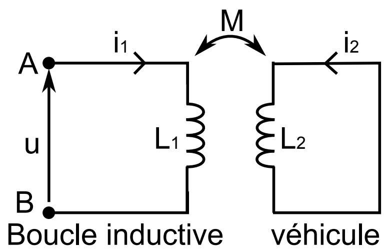
Exercice 2 Calcul d'une inductance mutuelle ⌑

On considère deux spires circulaires coaxiales (C_1) et (C_2) de centre O_1 et O_2 et de rayons R_1 et R_2. On suppose que la distance O_1O_2 est grande devant R_1 et R_2. On se propose de calculer l'inductance mutuelle de ces deux spires en adoptant les deux points de vue (calcul de M_{12} et de M_{21}). On rappelle l'expression du champ créé par une spire de rayon R sur son axe, à une distance z de son centre : $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2}(R^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}$.

1. On admettra que le champ magnétique créé par (C_1) au niveau de (C_2) est égal à $\overrightarrow{B}_1(O_2)$. En déduire le flux magnétique Φ_{12} puis le coefficient d'inductance mutuelle M_{12}.
2. De la même manière calculer Φ_{21} et en déduire M_{12}.
3. Vérifier qu'on retrouve $M_{12} = M_{21}$ lorsque $O_1O_2 \gg (R_1, R_2)$

Exercice 3 Détection par boucle inductive ✠⋈

En milieu urbain, la détection de véhicules par boucle inductive s'est fortement développée. Le capteur est une boucle conductrice d'inductance propre L_1 implantée dans la chaussée, formée de spire d'une taille dont l'ordre de grandeur est le mètre (dipôle AB parcouru par un courant $i_1(t)$). Lorsqu'un véhicule passe, des courants de Foucault sont induits dans la carcasse métallique. On modélise ce phénomène par un deuxième circuit d'inductance propre L_2 parcouru par un courant $i_2(t)$. On note M le coefficient de mutuelle inductance. On négligera la résistance des circuits.



1. Montrer qu'en présence du véhicule, le dipôle AB est équivalent à une inductance propre L' qu'on exprimera en fonction de L_1, L_2 et M.
2. Cette boucle fait partie d'un circuit électronique oscillant dont la fréquence est fonction de son inductance. Ce circuit est composé d'une capacité C et du dipôle AB. Quelle est la pulsation de résonance ? Calculer sa variation relative en fonction de la variation relative d'inductance.

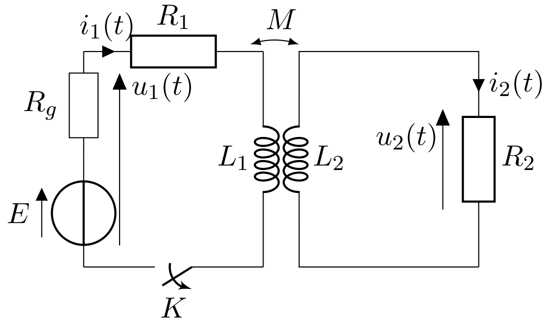
Exercice 4 Table à induction ◐✠⋈

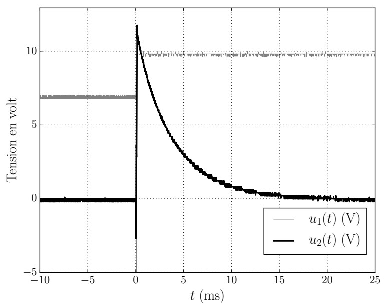
Le chauffage du fond métallique des récipients de cuisson peut être directement réalisé au moyen de courants de Foucault induits par un champ magnétique variable. Logé dans une table en céramique, un bobinage, nommé l'inducteur, alimenté en courant sinusoïdal génère ce champ. Le transfert d'énergie électrique s'effectue par induction mutuelle entre ce bobinage et le fond de la casserole circulaire assimilable à une spire unique fermée sur elle-même. L'inducteur, de 5,0 cm de rayon, comporte 20 spires de cuivre de résistance électrique $R_1 = 1,8.10^{-2}\ \Omega$ et d'autoinductance $L_1 = 30\ \mu$H. Le fond de la casserole de résistance $R_2 = 8,3\ m\Omega$ et d'autoinductance $L_2 = 0,24\ \mu H$, nommé l'induit, est assimilable à une spire unique refermée sur elle-même. L'inducteur est alimenté par une tension $v_1(t)$. L'ensemble casserole (induit)-inducteur se comporte comme deux circuits couplés par une mutuelle M.

1. Écrire les équations électriques relatives aux deux circuits (équation de couplage entre i_1 et i_2).
2. En déduire l'expression littérale du rapport des amplitudes complexes $\frac{\underline{I_2}}{\underline{I_1}}$.
3. En déduire l'expression littérale de l'impédance d'entrée complexe du système : $\underline{Z_e} = \frac{\underline{V_1}}{\underline{I_1}}$
4. On choisit ω telle que $R_1 \ll L_1\omega$ et $R_2 \ll L_2\omega$. Simplifier les deux expressions littérales précédentes, puis effectuer le calcul numérique de leur module, sachant que l'inductance mutuelle est estimée à $M = 2\ \mu$H et $f = 40$ kHz.
5. On soulève la casserole. L'amplitude du courant i_1 appelé par l'inducteur augmente-t-il ou décroît-il ? On demande un raisonnement purement qualitatif.

Exercice 5 Transformateur : l'âge de l'extinction ✠⌑⋈

Sam utilise un transformateur parfait alimenté par un générateur de résistance de sortie R_g délivrant une tension continue $e = E$ (voir schéma ci-dessous). Déçu de ne rien observer dans le circuit secondaire, il ouvre l'interrupteur K à un instant $t = 0$ et observe alors la furtive apparition d'une tension $u_2(t)$ aux bornes de la résistance R_2 du circuit secondaire. $R_1 = R_2 = 100\,\Omega$.





1. Déterminer les expressions des intensités théoriques i_1 et i_2 en régime permanent quand l'interrupteur K est fermé. Est-il pertinent de faire fonctionner le transformateur en régime permanent ?
2. De la même manière, déterminer les intensités théoriques i_1 et i_2 en régime permanent quand l'interrupteur K est ouvert.
3. Relever les valeurs de u_1 observées pour K ouvert et K fermé. En déduire les valeurs de E et R_g.
4. Justifier la continuité du flux magnétique $\Phi_2(t)$ à travers la bobine (2) à l'ouverture de K et en déduire l'expression de l'intensité $i_2(0^+)$ juste après l'ouverture de K en fonction de M, L_2 et de l'intensité $i_1(0^-)$ dans le circuit primaire juste avant l'ouverture de K.
5. Écrire puis résoudre l'équation différentielle vérifiée par $i_2(t)$. Utiliser le tracé expérimental de $u_2(t)$ pour proposer une estimation de L_2, M et L_1. On admettra que $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

Solutions des exercices

[1]*Réponses : 1)* $E_{ind} = \omega B_0 S = 0,12\ V$ *; 2)* $I_m = 0,12\ A$ *; 4)* $L = 0,39\ \mu H$*; 5)* $E'_{ind} = 15\mu V$

[2]*Réponses : 1)* $M_{12} \approx \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_1^2+O_1O_2^2)^{\frac{3}{2}}}$ *; 2)* $M_{21} \approx \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2(R_2^2+O_1O_2^2)^{\frac{3}{2}}}$ *; 3)* $M \approx \frac{\mu_0 \pi R_1^2 R_2^2}{2O_1O_2^3}$

[3]*Réponses : 1)* $L' = L1 - \frac{M^2}{L_2}$ *; 2)* $\Delta f_0 = \frac{\Delta L}{2\pi\sqrt{L^3 C}}$

[5]*Réponses : 3)* $E = 10\,\mathrm{V}$, $R_g = 39\,\Omega$ *; 4)* $i_2(0^+) = \dfrac{M}{L_2} i_1(0^-)$ *; 5)* $L_2 = 0{,}33\,\mathrm{H}$ *et* $M = 0{,}54\,\mathrm{H}$, $L_1 = 0{,}87\,\mathrm{H}$.