TD Induction n° 4

Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Capacités exigibles :

- Conversion mécanique-électrique : Écrire les équations électriques et mécanique en précisant les conventions de signes, effectuer un bilan énergétique, connaître les applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante ◐.
- Expliquer l'origine des courants de Foucault et en connaître des exemples d'utilisation ✠.
- Décrire qualitativement le principe du moteur à courant continu à entrefer plan ⌑.
- Expliquer le principe de fonctionnement d'un haut parleur électrodynamique dans la configuration simplifiée des rails de Laplace et effectuer un bilan énergétique ⋈.

Exercice 1 Principe d'un alternateur ◐

Une spire circulaire de rayon a et de résistance R tourne autour de l'axe Oz à vitesse angulaire ω constante. À l'instant $t = 0$, la spire est dans le plan yOz. Elle est de plus placée dans un champ magnétique uniforme et permanent, horizontal $\vec{B} = B\vec{u_x}$.

1. Expliquer les phénomènes ayant lieu.
2. Calculer la f.é.m. e induite dans la spire. En déduire l'intensité i la parcourant.
3. Quel est le couple Γ_{Lapl} exercé par le champ sur la spire ? Celle-ci pourra être assimilé à un dipôle.
4. Appliquer le théorème du moment cinétique à la spire. Expliquer ce qu'il se passe.
5. Comparer la puissance dissipée par effet Joule et la puissance fournie par le moteur qui entraîne la spire. Quel est le rendement de la transformation mécanique/électrique ?

Exercice 2 Les rails de Laplace ⋈

Un circuit est constitué de deux rails rectilignes, parallèles, horizontaux, de résistance négligeable et dont l'écartement est l. Le circuit comprend une résistance R et est fermé par une tige, parfaitement conductrice, de masse m, qui peut glisser sans frottement sur les deux rails. L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ vertical. On considère dans un premier temps qu'à l'instant $t = 0$, il n'y a pas de courant, $i(0) = 0$ et la tige est lancée avec un vitesse $v_0\vec{u}_x$ ($v_0 > 0$), puis abandonnée à elle-même.

1. Écrire les équations du système. Comment s'applique la loi de Lenz ? Donner la vitesse $v(t)$ de la tige.
2. Que devient l'énergie cinétique initiale de la tige ?

On considère maintenant que le circuit électrique comporte en plus de la résistance R, une capacité C en série et qu'à l'instant $t = 0$, la capacité est chargée ($q = q_0$) et la tige est immobile ($v_0 = 0$).

3. Écrire les équations du système. Comment s'applique la loi de Lenz ?
4. Faire un bilan instantanée de puissance.
5. On pose $\frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC} + \frac{B^2l^2}{mR}$. Donner les solutions $q(t)$, $i(t)$ et $v(t)$. Que constate-t-on lorsque $t \to \infty$? Expliquer.

Exercice 3 Principe d'un moteur asynchrone ⌑✠◐

Dans le plan xOy, le champ magnétique $\vec{B}$ produit par le stator est un champ tournant à la vitesse angulaire ω_0 et de norme constante. Le rotor, une petite bobine plate, fermée sur elle-même, est constitué de N spires, leur axe étant dirigé par le vecteur unitaire $\vec{n}$ également dans le plan xOy. Cette bobine peut tourner à la vitesse ω autour d'un de ses diamètres porté par l'axe (Oz) (l'arbre du moteur). On note à l'instant t, $\omega_0 t$ et $\omega t+\alpha$ les angles entre l'axe (Ox) et le champ magnétique $\vec{B}$ et $\vec{n}$. Montrer qualitativement, comment en régime permanent de rotation, ce dispositif peut fonctionner en moteur et justifier son nom de « moteur asynchrone ». Que se passe-t-il pour $\omega = \omega_0$?

Exercice 4 Mouvement de la bobine d'un sismomètre ⋈◐

Un sismographe est constitué d'un bâti de hauteur interne h, auquel est fixé un aimant cylindrique, constitué d'une partie centrale cylindrique (pôle nord et d'une partie extérieure cylindrique (pôle sud), produisant un champ magnétique radial noté $\vec{B} = B\vec{u}_r$ en coordonnées cylindriques d'axe vertical (Oz). Une bobine d'axe vertical de masse m possédant N spires est suspendue par un ressort, de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, à la partie supérieure du bâti. Elle est enroulée autour de l'aimant et peut coulisser sans frottement le long de l'axe vertical. On note L son inductance et R sa résistance. Elle est refermée sur elle-même (circuit électrique fermé). On note $z(t)$ la position du centre de gravité de la bobine dans le référentiel lié au bâti du sismographe et $z'(t)$ la grandeur qui décrit le mouvement du sol par rapport au référentiel géocentrique, supposé galiléen sur l'échelle de temps du séisme.

1. Pourquoi un courant se crée-t-il lors d'un séisme ?
2. Calculer la f.é.m. $e(t)$ induite par le mouvement de la bobine en fonction de la longueur du bobinage ℓ_b, du champ magnétique permanent créé par l'aimant et de $\dot{z}(t)$.
3. En déduire une première équation différentielle entre $z(t)$ et $i(t)$.
4. À l'aide de l'étude du mouvement de la bobine dans le référentiel lié au bâti du sismographe non galiléen, trouver une deuxième équation différentielle liant $i(t)$, $z'(t)$ et $\varepsilon(t) = z(t) - z_{eq}$, où z_{eq} est la position d'équilibre du bobinage en l'absence de séisme. On supposera que le PFD s'applique en ajoutant une force d'inertie $\vec{f}_i = -m\ddot{z}'(t)\vec{u}_z$ qui a pour origine le mouvement relatif du bâti par rapport au référentiel terrestre.
5. On suppose que l'onde sismique est sinusoïdale. On considère donc un mouvement forcé tel que $z'(t) = a\cos(\omega t)$ et on cherchera des solutions forcées sinusoïdalement.
   a) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H(j\omega)} = \frac{\underline{i(\omega)}}{\underline{z'(\omega)}}$.
   b) Que se passe-t-il quand $\omega \longrightarrow 0$? Quand $\omega \longrightarrow \infty$?
   c) Quel type de filtre obtient-on ?

Exercice 5 Freinage par courants induits ✠◐⋈

Deux spires circulaires métalliques identiques, de rayon a ont leur centre situés à l'origine O de l'espace. L'une est d'axe (Ox), l'autre d'axe (Oy). On note R la résistance électrique de chaque spire et on néglige son inductance propre. Un dipôle magnétique, également situé en O, est animé d'un mouvement de rotation, à vitesse Ω constante, dans le plan xOy. On admet que lorsque l'angle que fait le moment dipolaire avec l'axe d'une spire est égal à θ, le flux du champ créé dans cette spire s'écrit $\Phi = \Phi_0\cos\theta$ où Φ_0 est une constante qu'on ne cherchera pas à calculer.

1. On choisit l'origine des temps de telle manière que l'angle que fait le moment dipolaire avec $\vec{u}_x$ s'écrive $\theta(t) = \Omega t$. Établir les expressions des intensités induites dans les deux bobines. Que peut-on dire des propriétés comparées de ces deux intensités ?
2. Exprimer la puissance dissipée par effet Joule à chaque instant, dans chaque spire puis au total. Commenter le résultat.
3. Le dipôle est mis en rotation à la vitesse Ω_0 à l'origine des temps. La liaison assurant la rotation autour du point O est considérée sans frottement et on prend en compte l'inertie du dipôle tournant. Définir un temps caractéristique pour ce système.
4. Préciser le portrait de phase décrivant le régime dynamique et représenter l'évolution de la vitesse au cours du temps.
5. Quelle est l'influence de l'inertie du dipôle sur la durée de freinage ? Quel est l'effet d'un doublement de la valeur de la résistance R de la spire ?
6. Les intensités induites sont responsables de l'existence d'un champ magnétique $\overrightarrow{B_i}$. Quelle est son évolution au centre O des spires ? Quelle est son action sur le dipôle ?

Solutions des exercices

[1] *Réponses : 2)* $i(t) = \frac{B\pi a^2\omega}{R}\sin(\omega t)$ *; 3)* $\Gamma_{Lapl} = -\frac{B^2\pi^2a^4\omega}{R}\sin^2(\omega t)$

[2] *Réponses : 1)* $v(t) = v_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ *; 2)* $m\frac{dv}{dt} = ilB$, $vBl = R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C}$

[4] *Réponses : 2)* $e = \ell_bB\dot{z}(t)$ *; 3)* $\ell_bB\frac{dz}{dt} = L\frac{di}{dt} + Ri(t)$ *; 4)* $\ddot{\varepsilon} + \frac{\ell_bB}{m}i(t) + \omega_0^2\varepsilon = -\ddot{z}'(t)$ *; 5a)* $\underline{H(j\omega)} = \frac{\frac{m}{\ell_bB}\omega^2}{1+(\omega_0^2-\omega^2)\frac{m(R+jL\omega)}{j\omega(\ell_bB)^2}}$

[5] *Réponses : 1)* $i_1(t) = \frac{\Omega\Phi_0}{R}\sin(\Omega t)$, i_2 *en retard de* $\frac{\pi}{2}$ *; 2)* $P_J = \frac{\Omega^2\Phi_0^2}{R}$ *; 3)* $\tau = \frac{RJ}{\Phi_0^2}$ *; 6)* $\overrightarrow{B_i} = B_0\cos(\Omega t - \frac{\pi}{2})\overrightarrow{u_x} + B_0\sin(\Omega t - \frac{\pi}{2})\overrightarrow{u}_y$