



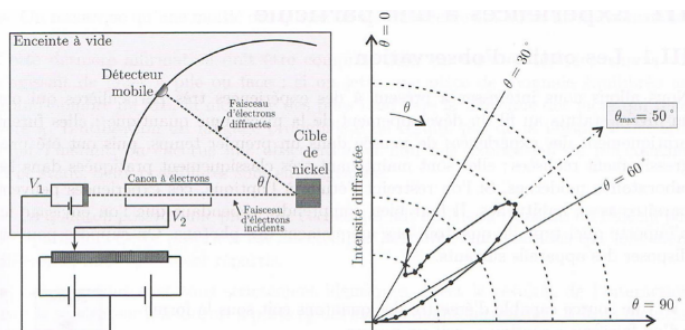
Capacités exigibles :

- Évaluer des ordres de grandeurs typiques intervenant dans des phénomènes quantiques ✖.
- Interpréter une expérience d'interférences en termes probabilistes ▢.
- Exploiter qualitativement l'inégalité de Heisenberg spatiale ▲.
- Établir le lien entre confinement spatial, énergie minimale et quantification ▢.
- Obtenir les niveaux d'énergie par analogie avec les modes propres d'une corde vibrante ✧.

Exercice 1 Expérience de Davisson et Germer ✖▢▢

En physique quantique, l'expérience de Davisson et Germer a fourni en 1927 une preuve expérimentale de l'hypothèse de De Broglie : « les électrons sont des particules qui peuvent se comporter comme des ondes ». Décrivons cette expérience :

Clinton Davisson et Lester Germer ont bombardé une cible de nickel monocristallin constitué de plans atomiques ordonnés séparés d'une distance $d = 0,092 \text{ nm}$, par des électrons accélérés sous une tension $U = 54 \text{ V}$. En utilisant un détecteur mobile, ils sont parvenus à étudier la dépendance angulaire du faisceau émergent, et à mettre en évidence une diffraction du faisceau d'électrons dans une direction $\theta \simeq 50^\circ$ par rapport à la direction du faisceau incident. La figure de diffraction est alors identique à celle observée par un faisceau incident de rayons X (RX).



Données :

- Constante de Planck : $h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ Js}$
- Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$
- Masse d'un électron : $m_e = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$
- Charge élémentaire : $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$

1. En quoi l'expérience de Davisson et Germer confirme la dualité onde-corpuscule de la matière ?
2. Rappeler les 2 paramètres caractéristiques d'une particule et de l'onde de matière associée, ainsi que la relation de De Broglie qui relie ces 2 paramètres. On précisera la signification des différentes grandeurs employées, et leur lien avec l'aspect ondulatoire ou corpusculaire de la matière.
3. Sachant qu'un électron accéléré sous une tension U voit son énergie potentielle diminuer ($\Delta E_p = -eU$) tout en gardant son énergie mécanique constante, déterminer la vitesse v de l'électron à la sortie de l'accélérateur.
4. Calculer la longueur d'onde de De Broglie associée à l'électron et vérifier que sa valeur est en accord avec le phénomène de diffraction observé.
5. Le domaine des RX s'étend de $3 \times 10^{16} \text{ Hz}$ à $3 \times 10^{19} \text{ Hz}$. Vérifier que la figure de diffraction des électrons peut être similaire à celle des RX.
6. Proposer une application de ce phénomène de diffraction dans le monde de la recherche.

Exercice 2 Quantification de l'énergie des atomes ✖✖▲

On considère un atome d'hydrogène. Classiquement, il se compose d'un noyau fixe (un proton) et d'un électron de masse m en orbite circulaire. Cet électron est localisé dans une certaine zone de l'espace proche du noyau.

1. Que peut-on en déduire concernant les valeurs possibles pour les énergies de l'électron (ou de l'atome) ?
2. Pour un atome d'hydrogène, l'énergie potentielle de l'électron à la distance r du noyau au : $V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ où $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$ est la permittivité du vide et $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ la charge élémentaire. La tracer et expliquer son allure.
3. En nommant a la distance typique de localisation de l'électron, estimer l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron en fonction de a .
4. Écrire l'énergie totale de l'électron : $E = E_c + V$ en fonction de a .
5. Tracer l'allure de la dépendance de E en fonction de a . En supposant que la stabilité de l'atome dans l'état fondamental impose la valeur a_0 de a rendant E minimale, exprimer a_0 en fonction des autres paramètres.
6. Que penser de l'application numérique ? On donne $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ et la constante de Planck réduite $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$.

Exercice 3 Diffusion Compton ♣♣

L'américain Arthur Compton a réalisé en 1923 l'expérience suivante. Il a envoyé des rayons X durs (ondes électromagnétique de faibles longueurs d'onde ($1 \text{ pm} \leq \lambda \leq 1 \text{ nm}$)) sur une mince feuille de graphite. Il a observé que l'onde était diffusée (déviée) dans une certaine gamme de directions θ vérifiant : $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$ où λ' est la longueur d'onde diffusée, $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ la masse de l'électron, $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$ la constante de Planck et $c = 3,0 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ la vitesse de la lumière.



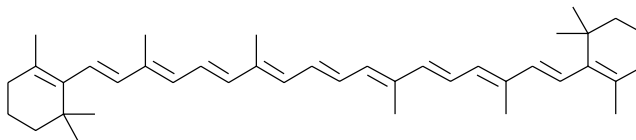
1. Montrer que $\frac{h}{mc}$ est homogène à une longueur et la calculer.
2. Pourquoi cette expérience est-elle intéressante spécialement pour des rayons X.
3. Comment évolue l'énergie d'un photon dans cette expérience, que se passe-t-il ?
4. Pour des rayons X incidents tels que $\lambda = 7,08 \cdot 10^{-11} \text{ m}$, Compton a observé des rayons X diffusés à 90° . Quelle est leur longueur d'onde ?
5. Quelle est l'énergie perdue par un photon ? Qu'en déduire sachant qu'une énergie d'ionisation est de l'ordre de la dizaine d'eV ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$)

Cette expérience peut être interprétée en termes corpusculaires, mais pas de manières ondulatoire, vu le changement de fréquence du rayonnement. Tout comme l'effet photoélectrique, elle nécessite donc la notion de photon.

Exercice 4 Énergie et fonction d'onde d'un électron confiné ♣✱✱✱***

Certaines molécules ayant une longue chaîne linéaire, comme le β -carotène, contiennent des électrons qui ne sont pas attachés à un noyau particulier, mais peuvent au contraire se déplacer sur toute la longueur de la molécule. On modélise un tel électron, de masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$, comme une particule qui se déplace librement sur un segment de droite, entre les abscisses $x = 0$ et $x = L$; l'énergie potentielle E_p est nulle sur le segment et infiniment grande partout ailleurs (particule dans une boîte). Sa fonction d'onde $\Psi(x)$ est alors liée à son énergie totale : E par l'équation différentielle : $-\frac{\hbar^2}{8\pi^2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} = E\psi$ (équation de Schrödinger stationnaire), où h est la constante de Planck.

1. Justifier que la fonction d'onde $\psi(x)$ est nulle en dehors de l'intervalle $]0; L[$.
2. $\psi(x)$ étant une fonction continue, elle est donc nulle aux deux extrémités de la molécule. Montrer que la solution de l'équation différentielle est de la forme $\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ où n est un entier et A une constante d'intégration qu'on ne cherchera pas à déterminer.
3. Donner l'expression des niveaux d'énergie E_n en fonction de m , L , h et n .
4. Dans le β -carotène, ce sont les électrons des onze liaisons doubles qui se comportent comme des particules libres confinées, sur une longueur $L = 1,83 \text{ nm}$. Dans l'état fondamental, ces électrons occupent les onze niveaux d'énergie les plus bas.



Calculer les niveaux d'énergie E_{11} et E_{12} . On donne $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$. En déduire l'énergie, puis la longueur d'onde λ dans le vide, d'un photon absorbé par la molécule lorsqu'un électron passe du niveau 11 au niveau 12. On donne $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$. Expliquer alors la couleur orangée des organismes contenant une grande quantité de cette molécule (carottes, citrouilles...).

Solutions des exercices

¹ Réponses : 3) $v = \sqrt{\frac{2qeU}{m_e}} = 4,4 \times 10^6 \text{ m.s}^{-1}$, 4) $\lambda = \frac{h}{m_e v} = 1,7 \times 10^{-10} \text{ m}$

² Réponses : 3) $v \approx \frac{h}{ma}$ 4) $E \approx \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$; 5) $a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}$; 6) $a_0 \approx 5 \cdot 10^{-11} \text{ m}$

³ Réponses : 1) $\frac{h}{mc} = 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ m}$; 4) $\lambda' = 7,32 \cdot 10^{-11} \text{ m}$; 5) 600 eV

⁴ Réponses : 3) $E_n = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}$; 4) a) $\lambda = 480 \text{ nm}$