Mesures et incertitudes

I Mesure d'une grandeur physique

I.1 Qu'est-ce qu'une mesure physique ?

- En physique, on appelle **mesure** (ou mesurage) une procédure expérimentale qui conduit à attribuer un ensemble de valeurs numériques à une grandeur, accompagné d'une unité appropriée.
- La **valeur mesurée** est la valeur que l'on obtient de la mesure. Elle est notée x_{mes}.
- La **valeur expérimentale** est la valeur notée x_{exp} obtenue expérimentalement, par mesurage unique ou multiple, ou par calcul.
- La **valeur de référence** est la valeur à laquelle on accorde plus de confiance, dérivée d'un modèle, issue d'un Handbook, ou constante universelle. Elle est notée x_{ref}.

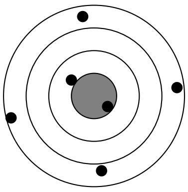
I.2 Variabilité de la mesure d'une grandeur physique

- La mesure est intrinsèquement variable : bien qu'on ne s'en aperçoive pas toujours, si on répète une mesure, on trouve souvent une valeur numérique différente. Par souci de clarté, on peut appeler chacune de ces valeurs numériques une **observation**.
- L'**incertitude de mesure** est une estimation de la variabilité d'une mesure. L'incertitude sur la mesure d'une grandeur x est notée $u(x)$.

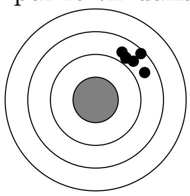
I.3 Fidélité et justesse

Un instrument de mesure est fidèle s'il fournit des résultats très voisins lors de mesures effectuées dans les mêmes conditions ; il est dit juste si les résultats fournis sont dépourvus d'erreur systématique (qui ne varie pas lors de mesures répétées).

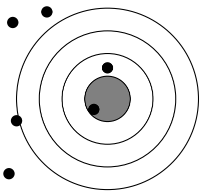
On peut illustrer les notions d'erreurs systématique et aléatoire par le tir dans une cible.



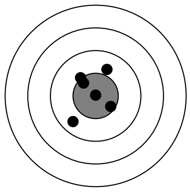
juste mais pas fidèle
(valeurs centrées mais dispersées)
erreurs aléatoires



fidèle mais pas juste
(valeurs décentrées mais resserrées)
erreurs systématiques



ni juste ni fidèle
erreurs aléatoires et systématiques



fidèle et juste
erreurs faibles

II Caractérisation de la variabilité d'une mesure

II.1 Moyenne et et écart-type

Si on note N observations x_i pour $i \in [1, N]$, alors la moyenne expérimentale $\overline{x}$ et l'écart-type expérimental s de ces N observations valent par définition :

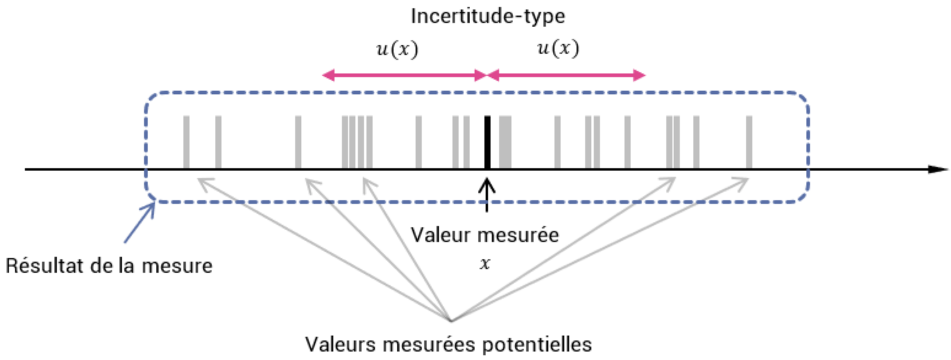
$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{et} \quad s = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

II.2 Incertitude-type

L'**incertitude-type** est l'estimation à l'aide d'un écart-type, de la dispersion des valeurs raisonnablement attribuables à la grandeur mesurée. La valeur mesurée est une de ces valeurs. L'incertitude-type quantifie donc la variabilité potentielle de cette unique valeur mesurée. En cela elle reflète son incertitude.

Plus concrètement : si une autre personne faisait une autre mesure, elle trouverait a priori une autre valeur mesurée. On s'attend à ce que la différence entre les deux valeurs mesurées soit du même ordre que l'incertitude-type initialement évaluée.

La dispersion est inhérente au processus de mesure. L'incertitude-type permet de la quantifier.



Le résultat d'une mesure est noté par convention : $x_{\text{exp}} \pm u(x)$ (x_{exp} dépend d'une valeur mesurée ou de plusieurs).

II.3 Incertitude relative

L'incertitude relative est le quotient : $\dfrac{u(x)}{x_{\text{exp}}}$. Elle est souvent exprimée en pourcentage. Plus elle est faible, moins la mesure est dispersée.

II.4 Comparaison de deux mesures : écart normalisé

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elle, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

L'écart normalisé E_N entre deux processus de mesures donnant les valeurs x_1 et x_2 et d'incertitudes types $u(x_1)$ et $u(x_2)$ est défini par :

$$E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Par convention, on dit que deux mesures sont compatibles si leur écart normalisé vérifie la propriété $E_N \leq 2$

Lorsqu'une valeur de référence est parfaitement connue, l'écart normalisé s'écrit

$$z = \frac{|x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}}|}{u(x)}$$

Ce quotient est souvent appelé *z-score*.

III Estimation d'une incertitude

III.1 Évaluation par une approche statistique (type A)

L'évaluation de l'incertitude de type A nécessite de reproduire N fois la même expérience de façon indépendante en suivant le même protocole pour évaluer les valeurs de $\overline{x}$ et de $u(\overline{x})$. Les valeurs obtenues seront d'autant plus précises que le nombre de mesures sera grand.

Soit x_1, x_2, ..., x_N les valeurs mesurées au cours de N prises de mesures indépendantes. On définit la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type $s(x)$ de l'échantillon de N mesures :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \quad \text{et} \quad s(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \overline{x})^2}$$

En l'absence d'erreur systématique, le processus de mesure nous conduit à $x_{\text{exp}} = \overline{x}$ et $u(\overline{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}}$.

Remarque : le calcul de l'écart-type de la série de valeurs peut être réalisé à l'aide des fonctions statistiques d'une calculatrice ou d'un tableur. Le symbole de cet écart-type diffère selon les modèles de calculatrices :

- `Sx` sur les modèles TI ;
- $x\sigma n - 1$ sur les modèles Casio ;
- `Ecart type echantillon` sur les modèles Numworks.

III.2 Évaluation d'une incertitude de type B

L'évaluation de type B est effectuée par des moyens autres que l'analyse statistique de série de mesures. Elle prend en compte les différentes sources d'erreurs lors d'une mesure unique :

1. l'incertitude de lecture des instruments de mesure gradués (exemples : lecture sur une règle, un rapporteur, un écran de l'ordinateur (pixellisation)...) ;
2. l'incertitude des instruments numériques sur la valeur affichée (exemples : oscilloscope numérique, ordinateur, multimètres...). Cette incertitude est indiquée dans les notices de ces appareils...
3. l'incertitude de la méthode (exemples : faisceau trop large, position imprécise de l'écran sur le banc optique, échantillonnage dû à la numérisation...) ;
4. l'incertitude de l'expérimentateur lui-même (travail soigné ou pas, conditions de mesures difficiles...).

III.2.a) Valeur issue d'une mesure (ou lecture) sans indication supplémentaire

L'utilisation du dernier chiffre est une façon simplifiée de prendre en compte l'incertitude sur une grandeur mesurée donnée sans intervalle et en l'absence d'autre indication : on peut considérer que l'incertitude est égale à la demi-unité du dernier chiffre exprimé. Lorsque le dernier chiffre fluctue beaucoup, on prend le dernier chiffre stable.

III.2.b) Mesure avec un instrument de mesure gradué

Lors d'une mesure sans variabilité observable, on estime la plus petite plage dans laquelle l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée. On note $\overline{x}$ la valeur centrale et Δ sa demi-largeur. Autrement dit, l'expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle $[\overline{x}-\Delta, \overline{x}+\Delta]$. Dans ce cas le résultat de la mesure est $x_{\text{exp}} = \overline{x}$ et $u(x) = \dfrac{\Delta}{\sqrt{3}}$.

Pour une lecture sur une règle graduée en mm, si la valeur tombe directement sur une graduation on pourra prendre $\Delta = 0{,}25\,\text{mm}$ alors que si la valeur tombe entre deux graduations, on prendra $\Delta = 0{,}5\,\text{mm}$.

III.3 Incertitude-type composée

On peut être amené à calculer l'incertitude-type d'une grandeur y, $u(y)$ qui dépend de plusieurs grandeurs a et b. On peut alors déterminer $u(y)$ dans les cas suivants :

	$u(y)$	$\frac{u(y)}{y}$
$y = \lambda a$ ($\lambda = cste$)	$\lambda u(a)$	
$y = a + b$	$\sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$	
$y = a - b$	$\sqrt{u(a)^2 + u(b)^2}$	
$y = \lambda a + \mu b$	$\sqrt{\lambda^2 u(a)^2 + \mu^2 u(b)^2}$	
$y = ab$		$\sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$
$y = \frac{a}{b}$		$\sqrt{\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$
$y = \lambda a^n b^m$		$\sqrt{n^2\left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + m^2\left(\frac{u(b)}{b}\right)^2}$

Incertitudes types composées quelconques : les relations présentées ci-dessous sont très restrictives ; dans les autres cas, nous déterminerons les incertitudes types à l'aide d'une simulation informatique comportant des tirages aléatoires utilisant un **algorithme de type Monte-Carlo**.

IV Présentation d'un résultat expérimental : chiffres significatifs

Cette année, l'incertitude-type sera arrondi par excès pour ne conserver qu'un seul chiffre significatif (il peut être d'usage d'en donner deux dans les milieux de la recherche et de l'industrie). La valeur d'une grandeur physique doit être écrite afin que le dernier chiffre significatif ait la même position (en écriture décimale) que le chiffre de l'incertitude. Par exemple l'écriture $x = 22{,}3\,\text{cm} \pm 3\,\text{mm}$ est correcte alors que l'écriture $x = 2{,}3\,\text{cm} \pm 3\,\text{cm}$ est incohérente (l'écriture correcte serait $x = 2\,\text{cm} \pm 3\,\text{cm}$).