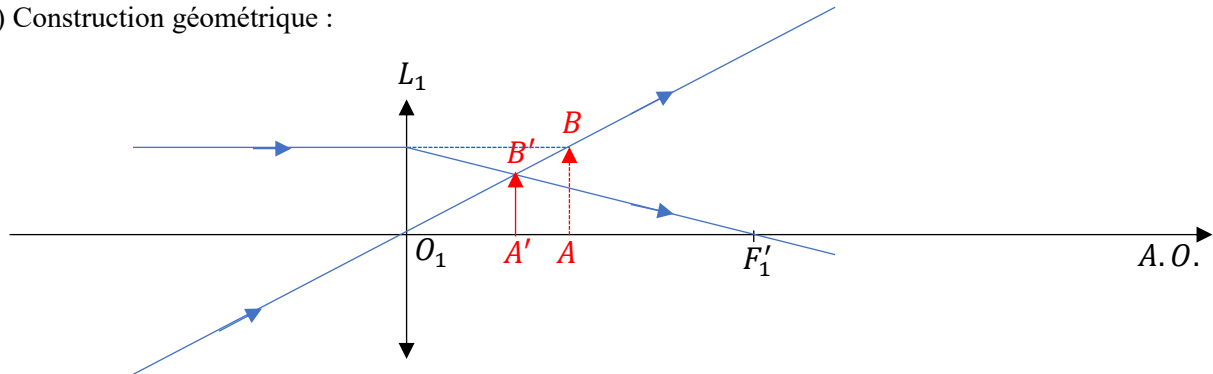


Problème 1: Etude d'un microscope et d'un téléobjectif

I. Etude de la lentille convergente L_1

1) Avec $0 < \overline{O_1A} < f'_1$: l'objet A est placé entre le centre optique O et le foyer image F'_1 , AB est donc un objet virtuel.

2) Construction géométrique :



3) L'image $A'B'$ est réelle.

4) On peut utiliser une première lentille dont l'image se formerait à droite de la lentille L_1 . Cette image est un objet virtuel pour L_1 .

5) Appliquons la relation de conjugaison de Descartes à L_1 :

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

$$\frac{1}{\overline{O_1A'}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{\overline{O_1A}}$$

A.N. : $\overline{O_1A'} = 4,4 \text{ cm}$

II. Etude d'un microscope

1) Grandissement de l'objectif : $\gamma_1 = \overline{A_1B_1}/\overline{AB} = \overline{O_1A_1}/\overline{O_1A}$. Appliquons la relation de Descartes à L_1 :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

En multipliant par $\overline{O_1A}$:

$$\frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_1A_1}} - 1 = \frac{\overline{O_1A}}{f'_1} = \frac{1}{\gamma_1} - 1$$

On établit la relation cherchée :

$$\gamma_1 = \frac{f'_1}{f'_1 + \overline{O_1A}}$$

2) A partir de l'expression précédente, on établit l'expression de $\overline{O_1A}$:

$$\overline{O_1A} = f'_1 \cdot \left(\frac{1}{\gamma_1} - 1 \right)$$

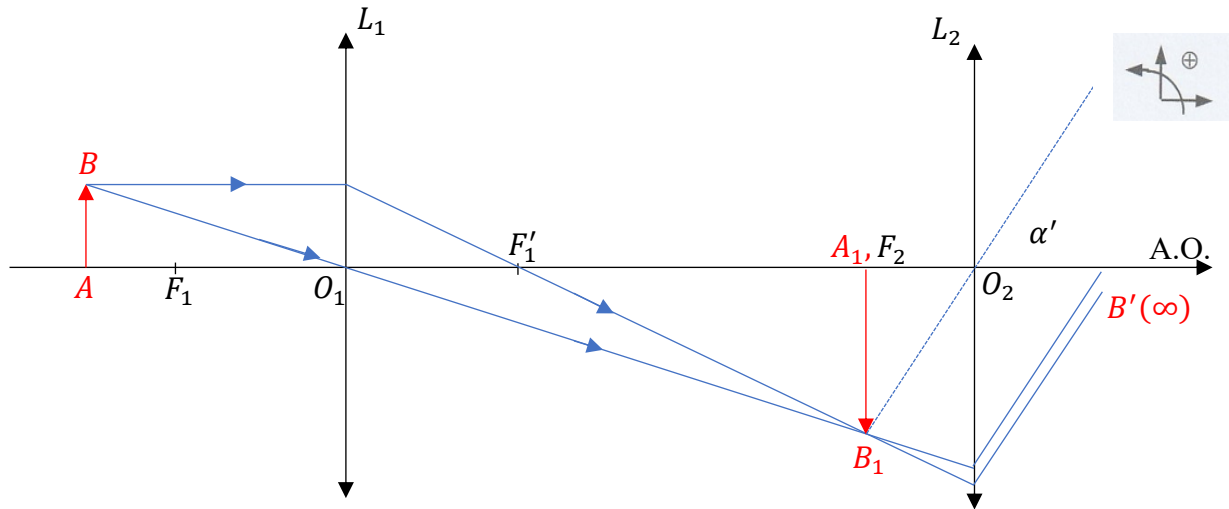
On souhaite que l'image soit réelle et agrandie, donc $\gamma_1 \leq -1$. A la limite : $\overline{O_1A}_{lim} = -2 \cdot f'_1$. Si l'objet A était placé entre F_1 et O_1 , son image serait virtuelle (cf étude d'une loupe). Il faut donc que :

$$-2 \cdot f'_1 < \overline{O_1A} < -f'_1$$

3) Une image réelle se forme sur un écran. Elle est observable à l'œil nu.

4) Pour observer $A'B'$ sans accommoder, il faut que l'image soit à l'infini. A partir de la relation de conjugaison (de Descartes ou Newton) on montre que ceci implique que l'image intermédiaire A_1B_1 se forme dans le plan focal objet de L_2 soit : $A_1 \sim F_2$.

5) Construction graphique :



6.1 : A partir de la relation de Descartes :

$$\frac{1}{\overline{O_1 A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f'_1}$$

A.N. : $\overline{O_1 A} = -11,0$ cm et $f'_1 = 10,0$ cm on établit que $\overline{O_1 A_1} = 110$ cm. Sachant que $f'_2 = 40,0$ mm : $\overline{O_1 O_2} = 114$ cm.

6.2 : Grandissement de l'objectif : $\gamma_1 = \overline{O_1 A_1} / \overline{O_1 A} = -10,0$.

6.3 : A partir de la construction réalisée ci-dessus :

$$\tan \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_2 F_2}}$$

Sachant que $\gamma_1 = \overline{A_1 B_1} / \overline{AB}$ on peut poser que $\overline{A_1 B_1} = \gamma_1 \cdot \overline{AB}$. Dans l'hypothèse des petits angles :

$$\alpha' = \frac{\gamma_1 \cdot \overline{AB}}{\overline{O_2 F_2}}$$

A.N. : $\alpha' = 2,50 \cdot 10^{-1}$ rad. = $14,3^\circ$

6.4 : Angle sous lequel l'observateur voit l'objet AB à l'œil nu :

$$\tan \alpha_0 = \frac{AB}{d_m} = \alpha_0$$

Dans l'hypothèse des petits angles :

$$\alpha_0 = \frac{AB}{d_m}$$

A.N. : $\alpha_0 = 4,00 \cdot 10^{-3}$ rad = $0,229^\circ$

Le grossissement du microscope est $G = \alpha' / \alpha_0 = 62,5$. Pour un banc d'optique, le microscope est très performant...

III. Principe d'un téléobjectif

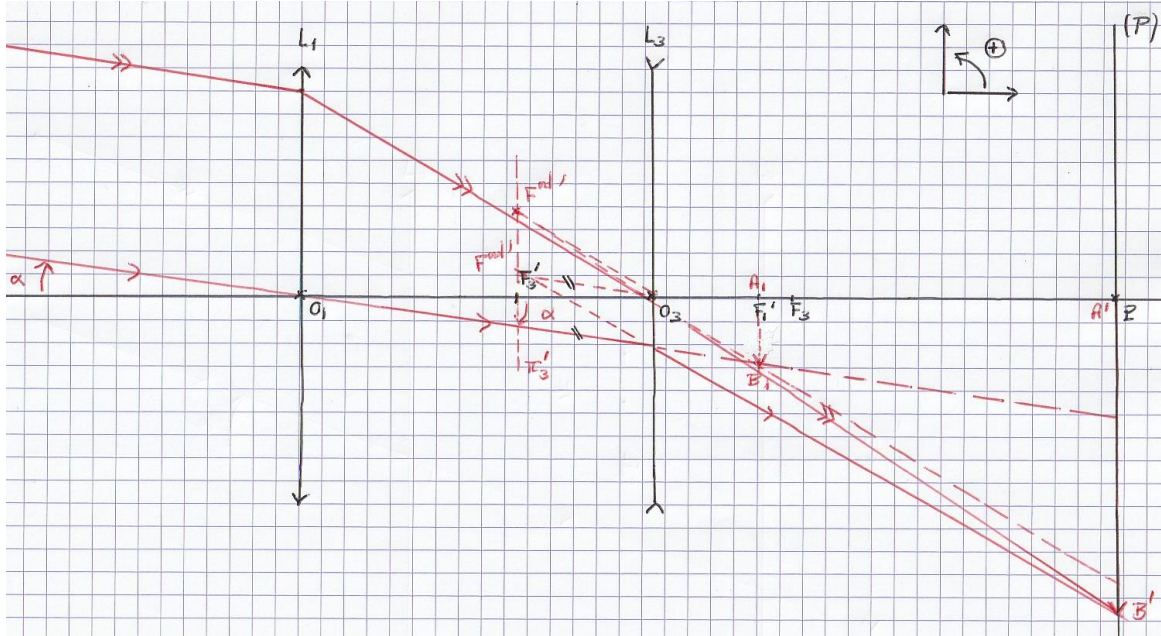
1) L'objet A est à grande distance donc $A_1 \sim F'_1$. Appliquons la relation de conjugaison de Descartes à la lentille L_3 :

$$\frac{1}{\overline{O_3 P}} - \frac{1}{\overline{O_3 F'_1}} = \frac{1}{f'_3}$$

$$\frac{1}{\overline{O_3 F'_1}} = \frac{1}{\overline{O_3 P}} - \frac{1}{f'_3}$$

A.N. : $\overline{O_3 F'_1} = 2,31 \text{ cm}$. Posons $\overline{O_1 O_3} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 O_3} = 7,69 \text{ cm}$

2) Construction graphique :



3) A partir de la construction graphique, dans l'hypothèse des petits angles :

$$\tan \alpha = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_1 F'_1}} = \alpha(\text{rad})$$

Grandissement de l'oculaire :

$$\gamma_3 = \frac{\overline{A' B'}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{O_3 P}}{\overline{O_3 F'_1}}$$

$$\overline{A' B'} = \left(\frac{\overline{O_3 P}}{\overline{O_3 F'_1}} \right) \cdot \overline{A_1 B_1}$$

En explicitant :

$$\overline{A' B'} = \alpha \cdot \overline{O_1 F'_1} \cdot \left(\frac{\overline{O_3 P}}{\overline{O_3 F'_1}} \right)$$

A.N. : $\overline{A' B'} = -4,33 \text{ cm}$

Problème n°2 : Estimation de la distance Terre-Lune

I. La mesure moderne de la distance Terre-Lune

1) Le champ incident d'expression $E_i = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x)$ est une onde progressive sinusoïdale se propageant dans le sens des x croissants, d'amplitude E_0 (unité $\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$) de pulsation ω (unité $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$) et de vecteur d'onde de norme k (unité $\text{rad} \cdot \text{m}^{-1}$).

2) Expression du champ électrique réfléchi :

$$E_r = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi)$$

avec E_r de même amplitude que l'onde incidente (condition nécessaire pour satisfaire les conditions aux limites), se propageant dans le sens des x décroissants, de phase à l'origine des temps et de l'espace notée φ .

On pose $E_{rés}(x, t) = E_i(x, t) + E_r(x, t)$:

$$E_{rés}(x, t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) + E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x + \varphi)$$

Déterminons φ sachant que $E_{rés}(L, t) = 0$:

$$E_{rés}(L, t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot L) + E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot L + \varphi) = 0$$

Cette égalité est vérifiée pour :

$$\varphi = -2 \cdot k \cdot L + \pi \mod(2 \cdot \pi)$$

Dans la suite, nous poserons :

$$\varphi = -2 \cdot k \cdot L + \pi$$

Soit :

$$E_r = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x - 2 \cdot k \cdot L + \pi)$$

3) Explicitons $E_{rés}(x, t)$:

$$E_{rés}(x, t) = E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x) + E_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + k \cdot x - 2 \cdot k \cdot L + \pi)$$

Formule trigonométrique :

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Soit :

$$E_{rés}(x, t) = 2 \cdot E_0 \cdot \cos\left(\omega \cdot t - k \cdot L + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(k \cdot x - k \cdot L + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$E_{rés}(x, t) = 2 \cdot E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot L) \cdot \sin(k \cdot x - k \cdot L)$$

Cette équation est caractéristique d'une onde stationnaire. Les conditions aux limites imposent que $E_{rés}(0, t) = 0$. En explicitant :

$$E_{rés}(0, t) = -2 \cdot E_0 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot L) \cdot \sin(k \cdot L) = 0 \text{ quel que soit } t$$

$$\sin(k \cdot L) = 0$$

On en déduit que :

$$k_n \cdot L = n \cdot \pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

On détermine les fréquences f_n possibles dans la cavité :

$$f_n = \frac{n \cdot c}{2 \cdot L}$$

4) Avec $\lambda = c/f$ si la fréquence est multipliée par 2, la longueur d'onde est divisée par 2 :

$$\lambda = 532 \text{ nm : domaine du visible}$$

5) Posons $2 \cdot D_{TL} = c \cdot \Delta t$:

$$D_{TL} = \frac{c \cdot \Delta t}{2}$$

$$\text{A.N. : } D_{TL} = 3,8 \cdot 10^5 \text{ km}$$

II. La lune dans l'Antiquité

6) Période de révolution de la Terre autour du Soleil : $\tau_t = 365,25$ j. La durée d'un cycle lunaire étant d'une durée $\tau_{cl} = 30$ jours, la fraction φ de l'orbite que parcourt la Terre durant un cycle lunaire est :

$$\varphi = \frac{\tau_{cl}}{\tau_t} = 8,2 \cdot 10^{-2}$$

7) Compte tenu du fait que la Terre tourne autour du Soleil, la période de révolution de la Lune n'est pas égale à la période du cycle lunaire (cf analogie avec période solaire et période sidérale). On peut poser que :

$$\tau_{cl} = \tau_l + \varphi \cdot \tau_l = (1 + \varphi) \cdot \tau_l$$

$$\tau_l = \frac{\tau_{cl}}{1 + \varphi}$$

A.N. : $\tau_l = 28$ j

8) Posons $l = \alpha \cdot R_T$ avec l longueur d'un arc d'angle α (à exprimer en radians) :

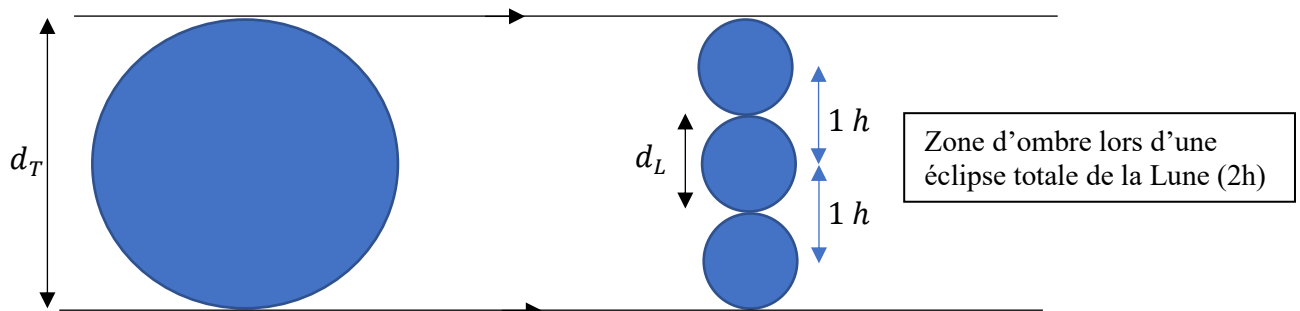
$$R_T = \frac{l}{\alpha}$$

Diamètre de la Terre :

$$d_T = 2 \cdot R_T = \frac{2 \cdot l}{\alpha}$$

A.N. : $\alpha = 0,16$ rad. ; $d_T = 13 \cdot 10^3$ km

9) Schéma illustrant les observations d'Aristarque de Samos :



Par construction, on peut dire que :

$$d_T = 3 \cdot d_L$$

Donc :

$$\frac{d_L}{d_T} = \frac{1}{3}$$

A.N. : $d_L = 4,2 \cdot 10^3$ km

Ecart relatif : 21 %. Compte tenu de la précision des mesures de l'époque réalisée sans lunette ni viseur, les résultats sont très satisfaisants.

10) Connaissant le diamètre de la Lune et l'angle (noté β) sous lequel on voit notre satellite, posons :

$$\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{R_L}{D_{TL}} = \frac{d_L}{2 \cdot D_{TL}}$$

Dans l'hypothèse des petits angles (avec β en radians) :

$$\beta = \frac{d_L}{D_{TL}}$$

Soit l'estimation de la distance Terre-Lune par Aristarque de Samos :

$$D_{TL} = \frac{d_L}{\beta}$$

A.N. : $D_{TL} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ km}$.

Si on prend en compte le fait que l'angle sous lequel on voit la Lune est 4 fois inférieure à la valeur estimée par Aristarque alors $D_{TL} = 4,0 \cdot 10^5 \text{ km}$: valeur proche de la valeur mesurée par télémétrie laser ($D_{TL} = 3,8 \cdot 10^5 \text{ km}$).

11) Masse de la Lune :

$$M_L = \rho \cdot V_L = \rho \cdot \left(\frac{4 \cdot \pi}{3} R_L^3 \right)$$

A.N. : $M_L = 6,7 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

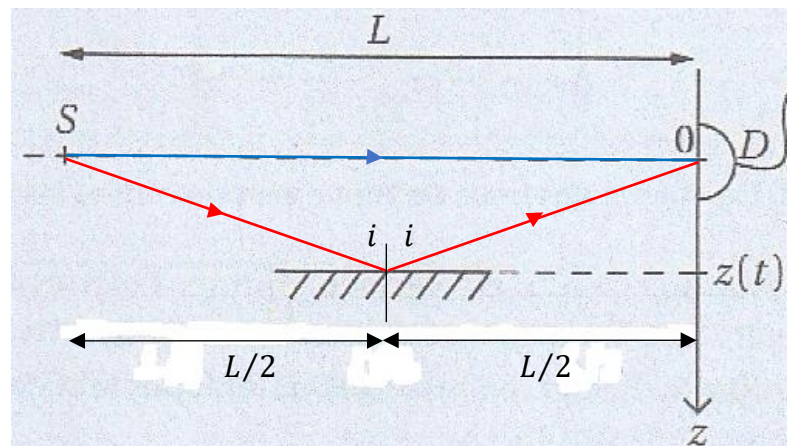
Estimation de l'intensité du champ de pesanteur lunaire :

$$g_L = \frac{G \cdot M_L}{R_L^2}$$

A.N. : $g_L = 1,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} = 0,15 \cdot g_T$

Problème 3 : Mesure du champ de pesanteur à l'aide d'un miroir de Lloyd

1) Par application de la loi de la réflexion, pour que le rayon réfléchi arrive en D , il faut que le rayon incident rencontre le miroir à la distance $L/2$ car les points S et D sont à la même hauteur :

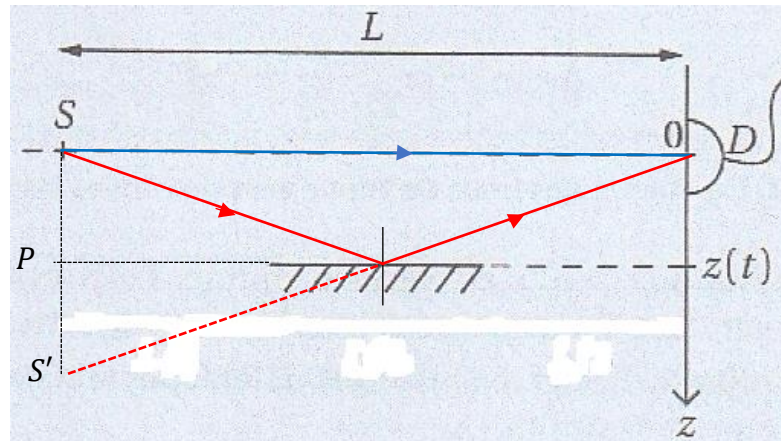


2) Les ondes sont en phase au point S . Le déphasage en D est dû au fait que les deux ondes n'adoptent pas la même trajectoire (déphasage de propagation). Ce déphasage est donné par :

$$\varphi(t) = k \cdot \delta_D = \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta_D}{\lambda}$$

avec $k = 2 \cdot \pi / \lambda$ norme du vecteur d'onde.

3) On note S' l'image de S par le miroir plan. Le point S' est le point symétrique de S par rapport à P :



En assimilant l'indice de l'air à celui du vide :

$$(SD) = SD = L \quad \text{et} \quad (S'D) = S'D = \sqrt{(2 \cdot z(t))^2 + L^2}$$

Nous savons que le rayon réfléchi est déphasé de π (cf énoncé). Sachant que la différence de marche est liée au déphasage par la relation :

$$\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta}{\lambda}$$

Pour $\varphi = \pi$, ceci génère une différence de marche supplémentaire pour le rayon réfléchi : $\delta_{ref} = \lambda/2$. On établit que :

$$\delta_D = \sqrt{(2 \cdot z(t))^2 + L^2} + \frac{\lambda}{2} - L$$

4) Factorisons L sous la racine :

$$\sqrt{(2 \cdot z(t))^2 + L^2} = L \cdot \left(1 + \left(\frac{2 \cdot z(t)}{L} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Sachant que pour $\varepsilon \ll 1$: $\sqrt{1 + \varepsilon} = 1 + \varepsilon/2$ au premier ordre en ε , dans l'hypothèse que $z(t) \ll L$, on établit que :

$$\sqrt{(2 \cdot z(t))^2 + L^2} = L \cdot \left(1 + \left(\frac{2 \cdot z(t)}{L} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = L \cdot \left(1 + \frac{2 \cdot z^2(t)}{L^2} \right)$$

En explicitant dans l'expression de δ_D on vérifie que :

$$\delta_D = \frac{2 \cdot z^2(t)}{L} + \frac{\lambda}{2}$$

5) A partir de la formule des interférences : $A_D(t) = \sqrt{2 \cdot A^2 + 2 \cdot A^2 \cdot \cos \varphi(t)}$, on peut dire que :

- les interférences sont **constructives** au point D pour $\cos \varphi(t) = 1$ c.à.d. pour :

$$\varphi(t) = 2 \cdot n \cdot \pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \quad (\text{car } \delta_D \geq 0 \text{ ici}) \quad \text{et} \quad \delta_D = n \cdot \lambda$$

- les interférences sont **destructives** au point D pour $\cos \varphi(t) = -1$ c.à.d. pour :

$$\varphi(t) = (2 \cdot n + 1) \cdot \pi \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \delta_D = \left(n + \frac{1}{2} \right) \cdot \lambda$$

6) On assimile le miroir à un point matériel observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. En supposant que le miroir n'est soumis qu'à son poids, le miroir est en chute libre. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, on établit que :

$$m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{g}$$

Soit, en projetant sur $\vec{u}_z$: $\ddot{z} = g$. Compte tenu des conditions initiales, en primitivant deux fois, on établit l'expression de $z(t)$:

$$z(t) = \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

Sachant que :

$$\varphi(t) = \frac{2 \cdot \pi \cdot \delta_D(t)}{\lambda}$$

En explicitant :

$$\varphi(t) = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \left(\frac{2 \cdot z^2(t)}{L} + \frac{\lambda}{2} \right) = \frac{\pi \cdot g^2 \cdot t^4}{\lambda \cdot L} + \pi$$

On établit que :

$$I_D(t) = 2 \cdot I_0 \cdot \left(1 + \cos \left(\frac{\pi \cdot g^2 \cdot t^4}{\lambda \cdot L} + \pi \right) \right)$$

7) A l'instant initial : $I_D(t) = 2 \cdot I_0 \cdot (1 + \cos(\pi)) = 0$. Ce résultat provient du fait que le rayon réfléchi est déphasé de π sur le miroir. Les interférences sont donc **destructives** à l'origine des temps.

8) On observe des maximums d'intensité lumineuse en D pour :

$$\cos \left(\frac{\pi \cdot g^2 \cdot t_n^4}{\lambda \cdot L} + \pi \right) = 1$$

C'est-à-dire pour :

$$\frac{\pi \cdot g^2 \cdot t_n^4}{\lambda \cdot L} + \pi = 2 \cdot n \cdot \pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

On établit l'expression des instant t_n pour lesquels l'intensité lumineuse est maximale en D :

$$t_n = \left(\frac{\lambda \cdot L}{g^2} (2 \cdot n - 1) \right)^{\frac{1}{4}} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

9) A partir de cette expression, on établit que :

$$g = \left(\frac{\lambda \cdot L}{t_n^4} (2 \cdot n - 1) \right)^{\frac{1}{2}} \text{ avec } n \in \mathbb{N}^*$$

Ce qui nous permet de calculer les valeurs de g expérimentales :

indice n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_n (en ms)	7,42	9,77	11,11	12,08	12,86	13,53	14,10	14,62	15,00
g (m.s ⁻²)	9,82	9,81	9,80	9,80	9,81	9,80	9,81	9,80	9,91

Dont la valeur moyenne est : $g = 9,82 \text{ m.s}^{-2}$

Dans ces mesures, on peut noter que la valeur mesurée pour $n = 9$ possède un écart relatif plus important. Ce serait intéressant de refaire la mesure !

Problème 4 : La marée

1) A partir du document représentant $h(t)$ fourni dans l'énoncé, on mesure que la valeur moyenne de la hauteur d'eau dans le port de Brest est voisine de 4 m . Cependant, la mesure exacte est délicate à partir de ce document... Si on observe le spectre en amplitude donné à la fin de l'exercice, on vérifie que le signal possède une composante continue égale à la valeur moyenne du signal d'amplitude $A_0 = 4,2\text{ m}$.

Le signal représentant $h(t)$ représente **un phénomène de battements**. On constate que $h(t)$ n'est pas rigoureusement périodique.

2) Mesures : entre 2 minimums de battements, on compte 27 marées hautes. En utilisant l'échelle des abscisses, on établit que la période de marée haute est $T_H = 0,521\text{ j} = 12\text{ h } 30\text{ min}$. De la même manière, on établit que la période de marée basse est égale à la période de marée haute : $T_B = T_H$ ce qui était prévisible.

La fréquence associée à cette période est $f = 1/T_H = 1,92\text{ j}^{-1}$. On vérifie que cette fréquence est en accord avec le spectre en amplitude fourni dans l'énoncé. En effet, la composante d'amplitude maximale du spectre est $1,93\text{ j}^{-1}$ proche de la fréquence f celle calculée ci-dessus.

3) Mesures : entre deux marées de vives-eaux, en utilisant l'échelle des abscisses $T_{VE} = 14,5\text{ j}$. De la même manière, entre deux marées de mortes-eaux on mesure que $T_{ME} = 14,1\text{ j}$.

4) On note $\omega_1 = 2\pi \cdot f_1$ et $\omega_2 = 2\pi \cdot f_2$ avec $f_1 = 1,93\text{ j}^{-1}$ et $f_2 = 2,00\text{ j}^{-1}$ les fréquences d'amplitudes maximales : $\omega_1 = 12,1\text{ rad} \cdot \text{j}^{-1}$ et $\omega_2 = 12,6\text{ rad} \cdot \text{j}^{-1}$. On note T_1 et T_2 les périodes associées : $T_1 = 0,518\text{ j}$ et $T_2 = 0,500\text{ j}$.

5) Sachant que :

$$h(t) = A_0 + A_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) + A_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2)$$

Etablissons les expressions de la période moyenne T_{moy} et de la période de battement T_{batt} en supposant $A_1 = A_2 = A$. Pour cela, utilisons la relation trigonométrique :

$$\cos p + \cos q = 2 \cdot \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

En explicitant :

$$h(t) = A_0 + 2 \cdot A \cdot \cos\left(\frac{(\omega_1 + \omega_2) \cdot t}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1) \cdot t}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right)$$

Posons :

$$\omega_{moy} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$$

On peut noter que $\omega_{moy} \gg \Omega$. Si on pose que $\omega_{moy} = 2\pi/T_{moy}$ et $\Omega = 2\pi/T$ alors $T_{moy} \ll T$. Sachant que $T = 2 \cdot T_{batt}$ (cf cours) on en déduit que :

$$T_{moy} = 0,509\text{ j} \quad \text{et} \quad T_{batt} = 14,3\text{ j}$$

Ces valeurs sont proches de $T_H = T_B = 0,521\text{ j}$ et de $T_{VE} = 14,5\text{ j}$ (ou $T_{ME} = 14,1\text{ j}$) calculées précédemment. Les écarts peuvent s'expliquer par le fait d'avoir retenu que deux composantes du spectre en amplitude de $h(t)$, ainsi qu'aux incertitudes sur les mesures de périodes.