## Annexe : Repérage d'un point sur une trajectoire connue – Repère de Frenet

Pour repérer un point $M$ le long d'une trajectoire connue, nous utiliserons les notions d'**abscisse curviligne** $s$ et de **base de Frenet** $(\vec{u_t}, \vec{u_n})$.

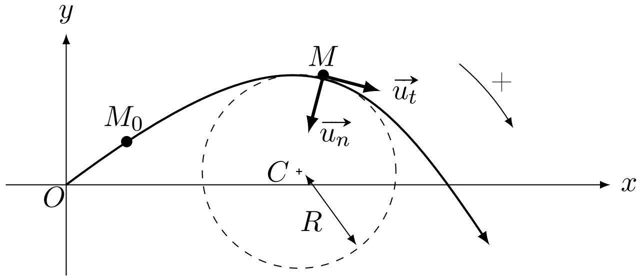
**Abscisse curviligne** L'abscisse curviligne $s$ d'un point $M$, se déplaçant selon une trajectoire connue dans le référentiel $\mathcal{R}$, est définie à l'instant $t$ par la longueur algébrique de l'arc $\overset{\frown}{M_0M}$ où $M_0$ est un point fixe sur la trajectoire :

$$s = \overset{\frown}{M_0M}$$

Le point $M_0$ et le sens d'orientation de la trajectoire sont choisis arbitrairement.

**Repère de Frenet** La base de Frenet est une base locale, liée au point $M$, définie par :
- $\vec{u_t}$ : vecteur unitaire tangent à la courbe au point $M$ et orienté dans le sens positif d'orientation de la trajectoire ;
- $\vec{u_n}$ : vecteur unitaire perpendiculaire au vecteur $\vec{u_t}$ et orienté vers le centre $C$ du cercle localement tangent à la courbe au point $M$, dit cercle osculateur.

La base de Frenet et le point $M$ définissent le repère de Frenet $(M, \vec{u_t}, \vec{u_n})$.




Le vecteur vitesse est tangent à la trajectoire au point $M$ et orienté dans le sens du mouvement. Par définition :

$$\vec{v} = v\vec{u}_t = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t$$

$v > 0$ si le point $M$ se déplace dans le sens positif d'orientation de la trajectoire ($s(t)$ croissant) et $v < 0$ sinon.

À l'instant $t$ un cercle osculateur de centre $C$ et de rayon $R$, identifié au rayon de courbure de la trajectoire, est tangent à la trajectoire au point $M$, ce qui signifie qu'un déplacement élémentaire du point $M$ entre $t$ et $t + \mathrm{d}t$ peut être confondu avec un arc de cercle. En admettant la généralisation de l'expression du vecteur accélération pour un mouvement circulaire on aboutit à :

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_n + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{u}_t = a_n\vec{u}_n + a_t\vec{u}_t$$

Le vecteur accélération pointe vers la concavité de la trajectoire plane, d'après le signe, toujours positif, de sa composante normale $a_n$. Sa composante tangentielle $a_t$ est nulle si le point $M$ se déplace avec une vitesse de norme constante.

Les composantes $a_n$ et $a_t$ du vecteur accélération peuvent nous donner des informations sur la nature du mouvement.
- À l'aide de la composante normale : il est possible de déterminer le rayon de courbure $R$ de la trajectoire si la norme $\|\vec{v}\| = |v|$ du vecteur vitesse est connue. Pour cela, il faut exploiter la relation $a_n = v^2/R$.
- À l'aide de la composante tangentielle : il est possible de déterminer l'évolution temporelle de la norme $\|\vec{v}\| = |v|$ du vecteur vitesse. Pour cela, il faut étudier le signe du produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{a}$.
  En effet : $\vec{v} \cdot \vec{a} = va_t = v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t}$, donc si $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$ alors $\|\vec{v}\|$ augmente et si $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$, $\|\vec{v}\|$ diminue.