



Capacités exigibles :

- Établir les expressions des composantes des vecteurs position, vitesse et accélération ●.
- Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé ✕.

Exercice 1 Vitesse d'un mobile ●

L'équation horaire du mouvement d'un mobile est la suivante.
Montrer que $\vec{V}$ fait un angle constant avec l'axe Oz . Quelle est la valeur de cet angle ?

$$\begin{cases} x = 4t^2 \\ y = 4(t - t^3/3) \\ z = 3t + t^3 \end{cases}$$

Exercice 2 Mouvements rectilignes simultanés ●✕

Soit une voiture de largeur L en mouvement le long d'un trottoir rectiligne $x'x$. Un piéton décide de traverser la route au moment où la voiture se trouve à une distance D . Le mouvement du piéton est rectiligne, uniforme, de vitesse $\vec{v}$, incliné d'un angle φ par rapport à l'axe Oy . La voiture se déplace à la vitesse constante $\vec{V} = V\vec{u}_x$. Quelle doit être la valeur de φ afin que la collision avec la voiture soit évitée, dans le cas d'une valeur minimale de la norme v de $\vec{v}$ que l'on précisera ?

Exercice 3 Équation horaire en coordonnées polaires ●

L'équation horaire du mouvement d'un point en coordonnées polaires est la suivante : $r = be^{\frac{-t}{\tau}}$ et $\theta = \omega t$.

1. Calculer la vitesse et l'accélération de ce point.
2. En déduire leur norme.
3. Déterminer l'angle entre le vecteur position et le vecteur vitesse.

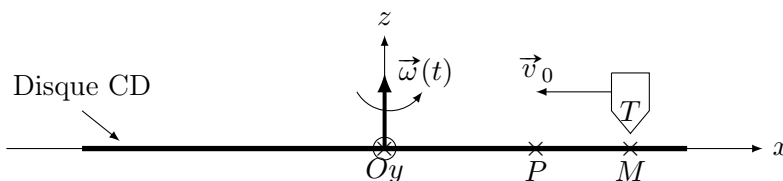
Exercice 4 Trajectoire cycloïdale ●✕

Une roue de rayon R et de centre C roule sans glisser sur un axe horizontal Ox . Le mouvement de la roue est paramétré par l'angle θ que fait un rayon fixé de la roue avec la position initiale à $t = 0$.

1. Quelles sont à l'instant t , les coordonnées cartésiennes du point M de la périphérie de la roue qui coïncidait avec O pour $\theta = 0$.
2. Calculer en fonction de R et θ les composantes de la vitesse et de l'accélération du point M .
3. Donner les valeurs des composantes de la vitesse et de l'accélération de M au moment où celui-ci touche à nouveau l'axe Ox .
4. On suppose maintenant que le mouvement du centre de la roue est rectiligne uniforme à la vitesse V_0 . Calculer la norme de l'accélération en fonction de V_0 et R . AN : $V_0 = 130 \text{ km.h}^{-1}$ et $R = 35 \text{ cm}$.

Exercice 5 Lecteur de CD ●✕

Lors de la lecture d'un disque CD, la tête de lecture (T) se déplace au-dessus du disque selon un axe Ox à la vitesse $v_0 = 8,0 \mu\text{m s}^{-1}$, de la périphérie vers le centre. Son abscisse est notée $x(t)$. Le disque tourne autour de l'axe Oz à une vitesse angulaire $\vec{\omega}(t) = \omega(t)\vec{u}_z$ variable de sorte que la vitesse du point M du disque « lu » par la tête de lecture ait toujours la même valeur v_1 .



Lorsque la lecture du disque commence $x = x_{\max} = 5,8 \text{ cm}$ et $\omega = \omega_0 = 200 \text{ tours min}^{-1}$. Lorsqu'elle se termine $x = x_{\min} = 2,5 \text{ cm}$.

1. Calculer la valeur de v_1 .
2. Établir l'expression de $x(t)$ et en déduire celle de $\omega(t)$.
3. Calculer la durée de lecture du CD ainsi que la vitesse angulaire de celui-ci en fin de lecture.
4. On considère un point fixe P du CD situé à la distance r de l'axe de rotation. Exprimer ses vecteurs vitesse et accélération à toute date t .

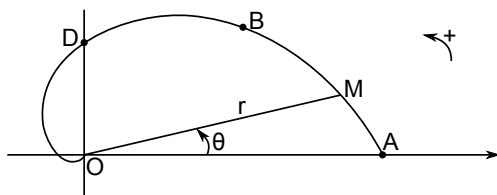
Exercice 6 Poursuite de chiens ❶❧

Quatre chiens sont placés aux sommets A , B , C et D d'un carré de centre O et de demi diagonale $a = OA$. À la date $t = 0$, chaque chien se met à courir vers son voisin avec une vitesse $\vec{v}$ qui garde une norme v_0 constante. On repère la position du chien M initialement en A par ses coordonnées polaire $(r(t), \theta(t))$. On admettra que pour des raisons de symétrie, les quatre chiens forment à tout instant $t \geq 0$ un carré.

1. Exprimer en fonction de v_0 les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ du chien M dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
2. En déduire le système des deux équations différentielles vérifiées par $r(t)$ et $\theta(t)$.
3. Établir les lois horaires $r(t)$ et $\theta(t)$, en fonction de a et v_0 . À quelles date t_f les quatre chiens se rejoignent-ils ?
4. Déterminer l'équation polaire $r(\theta)$ de la trajectoire suivie. Quelle est sa nature ?

Exercice 7 Déplacement d'un animal*** ❶❧

On repère la position d'un animal (point matériel M de masse m) se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ de pôle O . L'allure de la trajectoire pour θ variant de 0 à 2π est la suivante :

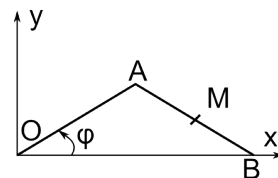


Il décrit une spirale logarithmique d'équation $r = ae^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a constante positive. Le mouvement est défini par la loi horaire : $\theta = \omega t$ où la vitesse angulaire ω est une constante positive.

1. Reproduire la figure ci-dessus et dessiner aux points A , B et D les vecteurs de la base locale $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$.
2. Exprimer dans cette base locale les vecteurs vitesse et accélération du point matériel.
3. Calculer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?
4. Donner les composantes du vecteur vitesse aux points $A(\theta = 0)$ et $D(\theta = \frac{\pi}{2})$ en fonction de a et de ω , et celles du vecteur accélération aux mêmes points en fonction de a et ω^2 .
5. En précisant l'échelle choisie pour $a\omega$ et $a\omega^2$, dessiner les vecteurs vitesses et accélération aux points A et D . Commenter.

Exercice 8 Rotation et translation ❶❧

Soit le système ci-contre, constitué de deux tiges identiques, de longueur $2a$, OA et AB articulées en A . La tige OA peut pivoter autour du point O , et l'extrémité de la tige AB peut coulisser le long de l'axe (Ox) . L'angle φ vérifie $\varphi = \omega t$ avec $\omega = \text{cste}$.



1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du milieu M de AB .
2. Déterminer l'accélération du point M

Solutions des exercices

¹Réponse : $\theta = 53,1^\circ$

²Réponse : $\tan \varphi_m = \frac{L}{D}$ et $v_m = \frac{VL}{\sqrt{D^2 + L^2}}$

³Réponses : 1) $\vec{v} = -\frac{b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u}_r + b\omega e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u}_\theta$ et $\vec{a} = b\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2\right)e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u}_r - 2\frac{\omega b}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\vec{u}_\theta$; 2) $v = b\sqrt{\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}}e^{-\frac{t}{\tau}}$, $a = b\left(\omega^2 + \frac{1}{\tau^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}$; 3) $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$

⁴Réponses : 2) $\vec{v} = R\dot{\theta}(1 - \cos \theta)\vec{u}_x + R\dot{\theta} \sin \theta \vec{u}_y$; 3) $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{a} = R\dot{\theta}^2\vec{u}_y$; 4) $a = \frac{V_0^2}{R}$

⁵Réponses : 1) $v_1 = 1,2 \text{ ms}^{-1}$; 2) $\omega(t) = \frac{v_1}{x_{\max} - v_0 t}$; 3) $t_L = 4,1 \times 10^3 \text{ s}$, $\omega(t_L) = 49 \text{ rad s}^{-1}$.

⁶Réponses : 1) $\vec{v} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$; 2) $\dot{r} = -\frac{v_0}{\sqrt{2}}$, $r\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}$; 4) $r = ae^{-\theta}$

⁷Réponses : 2) $\vec{v}(M) = a\omega e^{-\omega t}(-\vec{u}_r + \vec{u}_\theta)$, $\vec{a}(M) = -2a\omega^2 e^{-\omega t}\vec{u}_\theta$; 3) $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}a\omega e^{-\omega t}$

⁸Réponses : $\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2}$; $\vec{a} = -\omega^2 \vec{OM}$