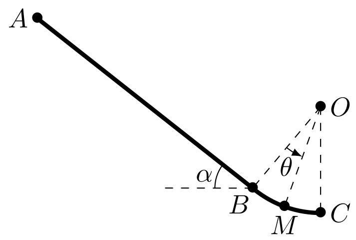
Problème : Cinématique de sports d'hiver

Les deux parties de ce problème sont totalement indépendantes.

A Saut à ski

Un skieur s'élance en A sur un tremplin constitué de deux parties représentées en coupe sur la figure ci-dessous. Le skieur est assimilé à un point matériel M glissant dans le plan vertical de la figure. Le début de la piste entre A et B est rectiligne, de longueur $L = AB = 60\,\mathrm{m}$ et de pente caractérisée par l'angle $\alpha = 35°$. La fin de la piste entre B et C est assimilée à un arc de cercle de rayon $R = 10\,\mathrm{m}$. Nous nous limitons à l'étude de la phase d'élan.
Le skieur s'élance en A à l'instant $t = 0$ sans vitesse initiale.



Entre A et B son mouvement est rectiligne et uniformément accéléré, de vecteur accélération $\vec{a}(M) = a_0 \vec{u}_x$ avec $a_0 = 5{,}6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et $\vec{u}_x = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{AB}$.

A.1 Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{v}(M)$ et position $\overrightarrow{AM}$ du skieur à chaque instant au cours de cette première phase.

A.2 À quel instant le skieur arrive-t-il en B ? Quelle vitesse possède-t-il alors ?

Entre B et C le mouvement de M est circulaire et l'angle θ permet de repérer sa position. La vitesse angulaire $\dot{\theta}$ dépend de θ selon la loi $\dot{\theta} = \omega_0\sqrt{\cos(\alpha - \theta) + \beta}$ où $\omega_0 = 1{,}4\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ et β est une constante.

A.3 Exprimer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{v}$ dans un système de coordonnées judicieusement choisi en fonction de R, $\dot{\theta}$ et des vecteurs unitaires préalablement définis.

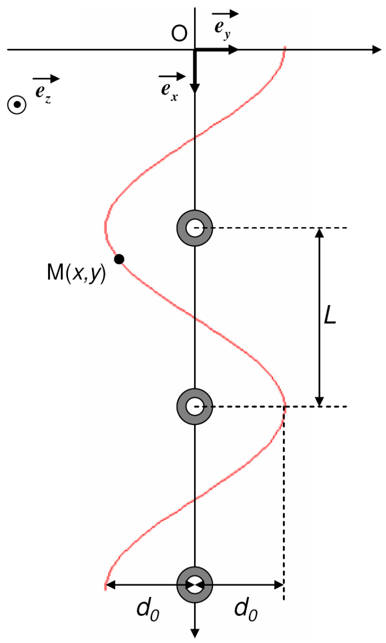
A.4 En déduire la vitesse au point B en fonction de R, ω_0, α et β, puis montrer que $\beta = \dfrac{2La_0}{R^2\omega_0^2} - \cos\alpha$ et calculer sa valeur numérique.

A.5 Exprimer le vecteur accélération de M. Le mouvement de M est-il uniforme ?

A.6 Exprimer puis calculer la vitesse du skieur en C.

B Super G

Lors d'une descente de super G, le skieur, repéré par le point M de coordonnées $(x; y)$ dans le référentiel $R(O; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, part du point $(0, d_0)$ puis est astreint a suivre une trajectoire sinusoïdale de slalom entre des portes espacées d'une distance L de manière à conserver a tout moment une vitesse dont la composante suivant Ox est constante : $\dot{x} = v_0 = 40\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. On s'intéresse dans cette partie à la cinématique du skieur.



B.1 Expliquer en quelques mots, en quoi consiste la cinématique du point.

B.2 La trajectoire se met sous la forme $y(x) = A\cos(Bx)$. Exprimer A et B en fonction de d_0 et L.

B.3 Exprimer $x(t)$ puis $y(t)$.

B.4 En déduire l'expression du vecteur vitesse et montrer que le vecteur accélération du skieur s'écrit $\vec{a} = -d_0\left(\frac{v_0\pi}{L}\right)^2\cos(\frac{\pi v_0 t}{L})\vec{e}_y$.

B.5 Pour que le skieur reste en piste, il doit conserver à tout moment une accélération inférieure à $0,7g$ où $g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. À quelle distance minimum L_{min} doit-on placer les portes. On donne $d_0 = 3{,}0\,\mathrm{m}$. Faire l'application numérique.