Problème : Cinématique de sports d'hiver

A Saut à ski

A.1 On considère l'axe Ax du segment AB et son vecteur unitaire $\vec{u}_x$, dirigé de A vers B. En intégrant deux fois l'accélération, on obtient successivement $\vec{v}(M) = a_0 t \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{AM} = \frac{a_0}{2} t^2 \vec{u}_x$ (constantes d'intégration nulles).

A.2 Le skieur arrive en B à l'instant t_B telque $\overrightarrow{AM}(t_B) = \overrightarrow{AB}$ soit $t_B = \sqrt{\frac{2L}{a_0}} = 4{,}6\,\mathrm{s}$ et sa vitesse est alors $\vec{v}(M)(t_B) = v_B = \sqrt{2La_0} = 26\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

A.3 On se place en coordonnées polaires de centre O et on définit l'angle θ tel que $\overrightarrow{OM}(\theta = 0) = \overrightarrow{OB} = R\vec{u}_r$. On ainsi $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r$ et le vecteur vitesse $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.

A.4 Au point B $\theta = 0$, $v_B = R\dot{\theta}(\theta = 0) = R\omega_0\sqrt{\cos\alpha + \beta} = \sqrt{2La_0}$. D'où : $\beta = \frac{2La_0}{R^2\omega_0^2} - \cos\alpha = 2{,}6$.

A.5 Le vecteur accélération s'écrit $\vec{a}(M) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(M)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(R\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + R\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{u}_\theta}{\mathrm{d}t} = R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r$. En dérivant $\dot{\theta}$ on obtient :
$\ddot{\theta} = \omega_0 \frac{\sin(\alpha - \theta)\dot{\theta}}{2\sqrt{\cos(\alpha - \theta) + \beta}} = \frac{\omega_0^2}{2}\sin(\alpha - \theta)$. D'où : $\vec{a}(M) = \frac{R\omega_0^2}{2}\sin(\alpha - \theta)\vec{u}_\theta - R\omega_0^2(\cos(\alpha - \theta) + \beta)\vec{u}_r$. Le mouvement de M est un mouvement circulaire non uniforme puis que $\vec{a}$ n'est pas perpendiculaire au vecteur $\vec{v}$.

A.6 Au point C : $\theta = \alpha$. D'où : $\vec{v} = R\omega_0\sqrt{1 + \beta}\,\vec{u}_X$ avec $\vec{u}_X$ vecteur unitaire horizontal. L'application numérique donne $v = 27\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

B Super G

B.1 La cinématique est l'étude du mouvement d'un point indépendamment des causes qui l'engendrent.

B.2 On a $y(0) = d_0 = A$. De plus on constate que lorsque le skieur est à l'abcisse $2L$, il a la même ordonnée qu'à son départ d'où $\cos(2BL) = 1$ c'est à dire $2BL = 2\pi$ soit $B = \frac{\pi}{L}$. La trajectoire se met alors sous la forme $\boxed{y(x) = d_0\cos(\frac{\pi x}{L})}$.

B.3 Par intégration on trouve $\boxed{x(t) = v_0 t}$ d'où $\boxed{y(t) = d_0\cos\left(\frac{\pi v_0}{L}t\right)}$

B.4 En dérivant on obtient $\boxed{\vec{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\overrightarrow{e_y} = v_0\overrightarrow{e_x} - \frac{v_0\pi d_0}{L}\sin\left(\frac{\pi v_0 t}{L}\right)\overrightarrow{e_y}}$ et
$\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\overrightarrow{e_y} = -d_0\left(\frac{v_0\pi}{L}\right)^2\cos(\frac{\pi v_0 t}{L})\overrightarrow{e_y}}$

B.5 Pour que le skieur reste en piste, il doit conserver à tout moment une accélération inférieure à $0,7\ g$. Il faut donc $\left|d_0\left(\frac{v_0\pi}{L}\right)^2\cos(\frac{\pi v_0 t}{L})\right| \leq 0,7g$ pour tout t c'est à dire $d_0(\frac{v_0\pi}{L})^2 \leq 0,7g$ d'où $\boxed{L_{min} = v_0\pi\sqrt{\frac{d_0}{0{,}7g}} = 23\,\mathrm{m}}$

TD Mécanique n°1

Exercice 2 Mouvements rectilignes simultanés

On prend comme origine du repère cartésien la position de l'avant de la voiture à la date $t = 0$. On en déduit par intégration de la vitesse les équations horaire du mouvement du piéton et de la voiture : $x_V = Vt$ et

$$\begin{cases} x_p(t) = D + v\sin\varphi t \\ y_p(t) = v\cos\varphi t \end{cases}$$

La collision avec le piéton sera évitée si l'ordonnée du piton y_p est supérieur à L lorsque la voiture est à hauteur du piéton ($x_v = x_p$). On peut alors déterminer la valeur de la vitesse du piéton pour éviter la collision en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} Vt_l = D + v\sin\varphi t_l \\ v\cos\varphi t_l = L \end{cases}$$

soit $t_l = \frac{L}{v\cos\varphi}$, et $\boxed{v = \frac{VL}{D\cos\varphi + L\sin\varphi}}$.

On cherche alors le minimum de cette vitesse en fonction de φ. Pour que cette vitesse soit minimale, il faut que le dénominateur soit maximum. On dérive alors le dénominateur : $\frac{d}{d\varphi}(D\cos\varphi - L\sin\varphi) = -D\sin\varphi + L\cos\varphi = 0$ soit $\boxed{\tan\varphi = \frac{L}{D}}$. On détermine alors la valeur minimale de la vitesse : $v = \frac{VL}{D\cos\varphi(1+(\frac{L}{D})^2)}$ et $\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + \tan^2\varphi = 1 + \frac{L^2}{D^2}$ soit $\cos\varphi = \frac{D}{\sqrt{L^2+D^2}}$ d'où $\boxed{v = \frac{VL}{\sqrt{L^2+D^2}}}$

Exercice 6 Poursuite de chiens

1. À tout instant, le segment $[OM]$ représente la demi-diagonale du carré formé par les quatre chiens. Le vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$ forme donc constamment un angle de 45° avec la direction du vecteur $\overrightarrow{u_r}$ d'où $\boxed{\overrightarrow{v} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}(-\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{u_\theta})}$

2. De manière générale, le vecteur vitesse s'écrit dans la base polaire $\overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$. Par identification avec l'expression précédente, on en déduit : $\boxed{\dot{r} = -\frac{v_0}{\sqrt{2}}}$ et $\boxed{r\dot{\theta} = \frac{v_0}{\sqrt{2}}}$.

3. La première équation différentielle se primitive en $r(t) = -\frac{v_0}{\sqrt{2}}t + C^{te}$ et sachant que $r(t=0) = a$ on identifie $C^{te} = a$ soi $\boxed{r(t) = a - \frac{v_0}{\sqrt{2}}t}$. La deuxième équation différentielle se réécrit alors : $\dot{\theta} = \frac{\frac{v_0}{\sqrt{2}}}{a - \frac{v_0}{\sqrt{2}}t}$ d'où $\theta(t) = -\ln|a - \frac{v_0}{\sqrt{2t}}| + K$. Sachant que $\theta(t=0) = 0$, on a $K = \ln a$ soit $\boxed{\theta(t) = \ln(\frac{a}{a - \frac{v_0}{\sqrt{2}}t})}$ (On enlève la valeur absolue puisque $r > 0$). Les quatre chiens se rejoignent à la date t_f telle que $r(t_f) = 0$, soit $\boxed{t_f = \frac{\sqrt{2}a}{v_0}}$

4. On remarque que $\theta(t) = \ln\frac{a}{r(t)}$ soit $\boxed{r = ae^{-\theta}}$; c'est l'équation d'une spirale logarithmique.