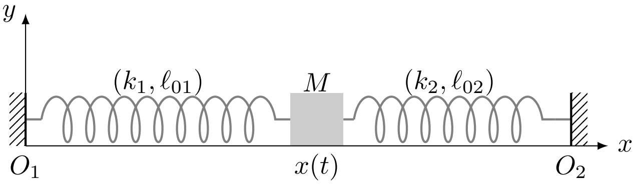
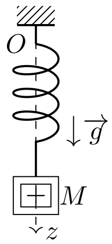
Éléments de correction du TD Mécanique n°2

Exercice 2 Masse reliée à deux ressorts ✠



1. Force exercée par le ressort 1 : $\vec{f}_1 = -k_1(O_1M - \ell_{01})\vec{u}_x$ ($\vec{u}_x$ sens d'élongation du ressort 1 et $O_1M = x$
   Force exercée par le ressort 2 : $\vec{f}_1 = k_2(O_2M - \ell_{02})\vec{u}_x$ ($\vec{u}_x$ sens de compression du ressort 2 et $O_2M = L - O_1M = L - x$)
   La résultante des forces élastiques s'écrit : $\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = (-k_1x + k_1\ell_{01} - k_2x + k_2L - k_2\ell_{02})\vec{u}_x$.
2. S'il n'y avait qu'un unique ressort accroché en O_1 on aurait : $\vec{f} = -k_3(x - \ell_{03})\vec{u}_x$. Par identification avec l'expression de la question précédente, on obtient $\boxed{k_3 = k_1 + k_2}$ et $k_3\ell_{03} = k_1\ell_{01} + k_2L - k_2\ell_{02}$ soit $\boxed{\ell_{03} = \frac{k_1\ell_{01}+k_2L-k_2\ell_{02}}{k_1+k_2}}$.
3. On considère le ressort équivalent de raideur k_3 et de longueur à vide ℓ_{03}. On étudie le mobile de masse m assimilé à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. En plus de la résultante des forces élastique $\vec{f}$, le mobile est soumis au poids ($\vec{P} = -mg\vec{u}_y$) et à la réaction normale du support $R_N = R_N\vec{u}_y$ car on suppose que les frottements solides sont négligés ($\vec{R_T} = \vec{0}$) tout comme les frottements fluides de l'air. L'application de la deuxième loi de Newton projetée suivant $\vec{u}_x$ donne : $m\ddot{x} = -k_3(x-\ell_{03})$, soit $\boxed{\ddot{x} + \frac{k_3}{m}x = \frac{k_3}{m}\ell_{03}}$. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ce qui correspond à un **mouvement de translation rectiligne sinusoïdal** à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_3}{m}}$.
4. La solution de l'équation différentielle est la somme d'un solution particulière $x_P = \ell_{03}$ et de la solution de l'équation homogène : $x_H = K_1\cos\omega_0t + K_2\sin\omega_0t$, soit $x(t) = \ell_{03} + K_1\cos\omega_0t + K_2\sin\omega_0t$ avec K_1 et K_2 des constantes d'intégration qui se déterminent à partir des conditions initiales. À l'équilibre le solide à une résultante des forces nulles d'après la deuxième loi de Newton soit $x_{eq} = \ell_{03}$, ainsi $x(0) = \ell_{03} + A$ soit $K_1 = A$. Le mobile n'a pas de vitesse initiale soit $v(0) = 0 = -A\omega_0\sin(\omega_0 \times 0) + K_2\omega_0\cos(\omega_0 \times 0)$ soit $K_2 = 0$. Ainsi $\boxed{x(t) = \ell_{03} + A\cos(\omega_0t).}$

Exercice 3 Oscillations verticales d'une masse ✠



1. Les forces qui s'exercent sur la masse sont le poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$ et la tension du ressort : $\vec{T} = -k(z - \ell_0)\vec{u_z}$.
2. On applique la deuxième loi de Newton au point matériel $M(m)$ dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen : $m\ddot{z} = -k(z - \ell_0) + mg$ soit $\boxed{\ddot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{k}{m}\ell_0 + g}$
3. La position d'équilibre est la position lorsqu'il n'y a pas de mouvement ($\dot{z} = 0$ puis $\ddot{z} = 0$), cela correspond également à la solution particulière de l'équation différentielle que l'on vient d'obtenir : $\boxed{z_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$. On vérifie que $z_{eq} > \ell_0$ car la pesanteur tend à étirer le ressort.
4. $u = z - z_{eq}$ soit $z = u + z_{eq}$ et en dérivant $\dot{u} = \dot{z}$ et $\ddot{u} = \ddot{z}$, on remplaçant z et ses dérivées dans l'équation différentielle précédente, on obtient $\boxed{\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0}$. On retrouve l'équation d'un oscillateur harmonique sans second membre (pas de solution particulière car la position d'équilibre est pour $u = 0$).
5. On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre de l'oscillateur harmonique. La période des oscillations s'écrit $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$. Plus la masse est importante, plus le mouvement est lent et plus la période est grande.
6. La solution de l'équation homogène de l'oscillateur harmonique s'écrit : $u(t) = K_1\cos\omega_0t + K_2\sin\omega_0t$ avec K_1 et K_2 des constantes d'intégrations qui se déterminent à partir des conditions initiales. Ici $u(0) = 0$ (position d'équilibre) soit $\boxed{K_1 = 0}$ et $\dot{u}(0) = -v_0 = K_2\omega_0$ soit $\boxed{K_2 = -\frac{v_0}{\omega_0}}$, ainsi $\boxed{u(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0t}$.