

Problème n°1 : Des oiseaux haut en couleur

I. Le bleu de la perruche

Q.1- Pour un œil emmétrope, l'œil au repos est adapté pour une vision à l'infini. Il faut donc que l'image A_2 soit à l'infini. Si l'image de l'oculaire est à l'infini alors son objet A_1B_1 est dans le plan focal objet de la lentille. En effet, appliquons la relation de conjugaison de Descartes à L_2 :

$$\frac{1}{\overline{O_2A_2}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F'_2}}$$

Avec $\overline{O_2A_2} \rightarrow \infty$:

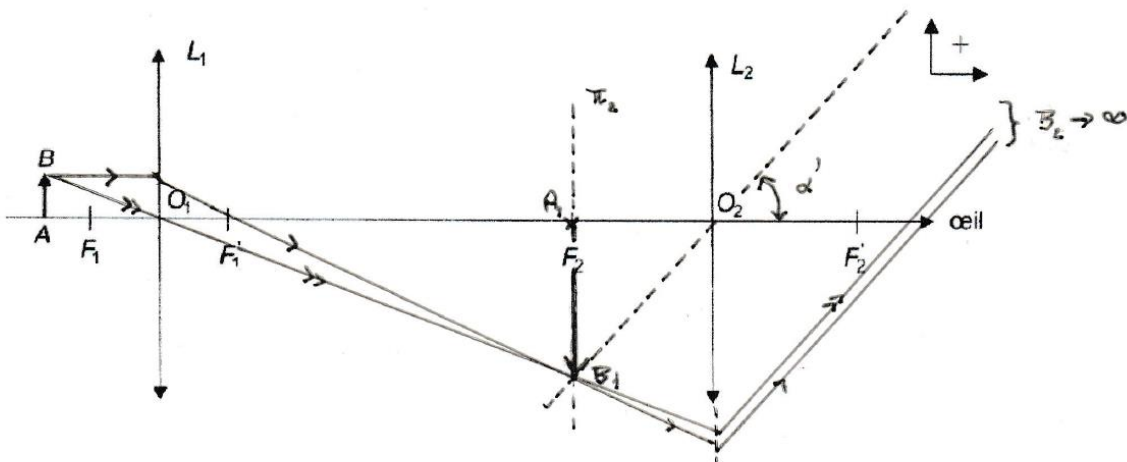
$$-\frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{\overline{O_2F'_2}}$$

On vérifie que :

$$\overline{O_2A_1} = -\overline{O_2F'_2}$$

$$A_1 \sim F_2$$

Q.2- Schéma du microscope utilisé par un œil emmétrope au repos :



Q.3- A partir du rayon passant par F'_1 explicitons le grandissement transversal de l'objectif :

$$\gamma_1 = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'_1A_1}}{\overline{O_1F'_1}} = -\frac{\Delta}{f'_1}$$

Q.4- A partir du schéma ci-dessus, on établit que :

$$\tan \alpha' = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}$$

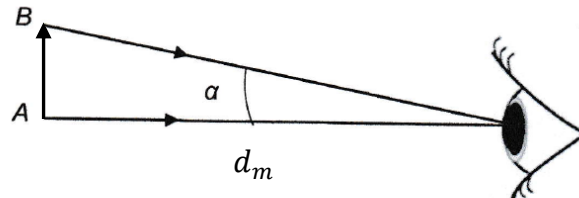
En explicitant $\overline{A_1B_1}$, en posant $\overline{AB} = h$ et dans l'hypothèse des petits angles :

$$\alpha' = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2} = \frac{\Delta h}{f'_1 f'_2}$$

Q.5- La distance minimale de vision distincte est appelée le Punctum Proximum (PP) et la distance maximale de vision distincte, le Punctum Remotum (PR). Pour un œil emmétrope, le (PP) est de quelques centimètres, mais il est d'usage de poser que $d_m = 25$ cm pour le calcul des « grandeurs commerciales » et le (PR) est à l'infini :

$$d_m = 25 \text{ cm} \quad \text{et} \quad d_M \rightarrow \infty$$

Q.6- A partir du schéma ci-dessous, en posant $\overline{AB} = h$:



$$\tan \alpha = \frac{h}{d_m}$$

Q.7- En explicitant α et α' on vérifie que :

$$G_C = \frac{d_m \Delta}{f'_1 f'_2}$$

A.N. : $G_C = 1,7 \cdot 10^2$

Q.8- A la limite de résolution de l'œil :

$$G_C = \frac{\varepsilon}{\alpha_m}$$

Soit :

$$\alpha_m = \frac{\varepsilon}{G_C} = \frac{\varepsilon f'_1 f'_2}{d_m \Delta}$$

A.N. : $\alpha_m = 6,0 \cdot 10^{-3} ' = 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ rad}$.

Q.9- Sur le schéma, on peut déterminer la distance entre deux crochets. Valeur moyenne mesurée sur 4 crochets : $d_C = 25 \mu\text{m}$

Q.10- Angle sous lequel l'observateur verrait les crochets à l'œil nu : $\alpha = \frac{d_C}{d_m} = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ rad} < \varepsilon$ avec $\varepsilon = 1' = 3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$. On en déduit que l'observateur ne pourrait pas voir les crochets à l'œil nu. Avec le microscope $\alpha' = G_C \alpha = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ rad} > \varepsilon$, l'observateur peut observer les crochets avec le microscope.

Q.11- On note $\langle \mathcal{P}_b \rangle$ et $\langle \mathcal{P}_r \rangle$ les puissances moyennes diffusées dans le bleu et dans le rouge. Exprimons le rapport de ces puissances :

$$\frac{\langle \mathcal{P}_b \rangle}{\langle \mathcal{P}_r \rangle} = \frac{\omega_b^4}{\omega_r^4}$$

Sachant que :

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

$$\frac{\langle \mathcal{P}_b \rangle}{\langle \mathcal{P}_r \rangle} = \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_b} \right)^4$$

A partir des valeurs numériques proposées pour la longueur d'onde, si on pose $\lambda_b = 475 \text{ nm}$ et $\lambda_r = 700 \text{ nm}$:

$$\langle \mathcal{P}_b \rangle = 5 \langle \mathcal{P}_r \rangle$$

On constate que le plumage d'une perruche diffuse 5 fois plus le bleu que le rouge... les radiations non diffusées sont transmises par les micro-granules.

II. Du vert au violet pour le canard colvert

Q.12- Chaque micro-lamelle se comporte comme un petit miroir réfléchissant la lumière... La structure en micro-lamelles constitue donc un réseau par réflexion.

Q.13- A partir de la figure 6-a on établit que :

$$\delta_i = HO_{n+1} = a \sin \theta_0$$

De la même manière, on établit que :

$$\delta_t = O_n P = a \sin \theta$$

On en déduit que la différence de marche (qui est une grandeur algébrique) entre les deux rayons au point M est donnée par :

$$\delta(M) = (SO_{n+1}M) - (SO_nM) = O_n P - HO_{n+1}$$

En explicitant, on vérifie que :

$$\delta(M) = a. (\sin \theta - \sin \theta_0)$$

Q.14- Avec $\varphi(M)$ déphasage entre les deux rayons au point M :

$$\varphi(M) = \frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0}$$

Q.15- En M les interférences sont constructives pour $\cos \varphi(M) = 1$ soit pour :

$$\varphi(M) = 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

En explicitant :

$$\frac{2\pi\delta(M)}{\lambda_0} = 2k\pi$$

Les interférences sont constructives pour : $\delta(M) = k\lambda_0$

Q.16- De la même manière, en représentant les plans d'ondes passant par O_n et O_{n+1} on établit que la différence de marche (algébrique) est donnée par :

$$\delta(M) = a. (\sin \theta + \sin \theta_0)$$

en notant que $\theta < 0$.

Les interférences sont constructives pour $\delta(M) = k\lambda_0$. On vérifie que :

$$\sin \theta_k + \sin \theta_0 = \frac{k\lambda_0}{a}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$

Q.17- Les micro-lamelles sont éclairées en incidence normale $\theta_0 = 0$. A partir de la figure 5, en effectuant la mesure sur plusieurs lamelles, on mesure $a = 0,23 \mu\text{m}$ entre deux micro-lamelles. La relation précédente devient :

$$\sin \theta_k = \frac{k\lambda_0}{a}$$

- Pour l'observateur A : $\theta = 90^\circ$ et $\sin \theta_k = 1$ donc $k\lambda_0 = a$. Pour $k = 1$: $\lambda_0 = 0,23 \mu\text{m}$ (pour des valeurs plus élevées de k la longueur d'onde est plus courte et nous éloigne du spectre du visible). λ_0 est du domaine du proche UV...?
- Pour l'observateur B : $\theta = 45^\circ$ et $\sin \theta_k = 0,71$ donc $k\lambda_0 = 0,71a$. Pour $k = 1$: $\lambda_0 = 0,16 \mu\text{m}$

Rq. : Compte tenu des colorations du plumage d'un colvert... on a tout lieu de penser que la distance entre les micro-lamelles est supérieure à $a = 0,23 \mu\text{m}$. Si $a = 0,58 \mu\text{m}$ (valeur de a supérieure d'un facteur 2,5) alors on retrouve bien la couleur verte du colvert sous incidence normale en A et bleu en B.

III. Le colibri aux mille couleurs

Q.18- Sur la photo 7, en effectuant la mesure sur plusieurs micro-lamelles, on mesure une distance d'environ 3 mm. Avec un grandissement de 6000 on peut considérer que :

$$e = 0,5 \mu\text{m}$$

Q.19- La couleur du colibri résulte d'interférences constructives. Posons $\delta(M) = k \cdot \lambda = 2 \cdot e \cdot \cos i$

Pour $k = 1$: $\lambda_r = 2 \cdot e \cdot \cos i_r$ et $\lambda_b = 2 \cdot e \cdot \cos i_b$

A.N. : avec $\lambda_r = 700 \text{ nm}$: $i_r = 46^\circ$
avec $\lambda_b = 480 \text{ nm}$: $i_b = 61^\circ$

Le colibri doit tourner la tête d'un angle $\Delta i = i_b - i_r = 15^\circ$

Problème n°2 : Cavités résonnantes

I. Cavité résonante électromagnétique

Q.1- A partir de l'équation différentielle (1), on peut dire que $[\varepsilon_0 \mu_0] = \text{T}^2 \text{L}^{-2}$. On vérifie que :

$$[c] = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \right] = \text{L} \cdot \text{T}^{-1}$$

A.N. : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$: la vitesse de l'onde électromagnétique s'identifie à la célérité de la lumière dans le vide.

Q.2- Avec $\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{u}_y$, on peut dire que l'onde électromagnétique est sinusoïdale progressive. Compte tenu du fait que le champ électrique est dirigé sur \vec{u}_y (c.à.d. dans une direction orthogonale à la direction de propagation de l'onde), l'onde électromagnétique est transversale.

Q.3- Explicitons le champ $\vec{E}(x, t)$ donné par la formule (2) dans la relation (1) :

$$\frac{d^2 \vec{E}(x, t)}{dx^2} = -k^2 \vec{E}(x, t)$$

$$\frac{d^2 \vec{E}(x, t)}{dt^2} = -\omega^2 \vec{E}(x, t)$$

En explicitant :

$$-k^2 \vec{E}(x, t) - \varepsilon_0 \mu_0 (-\omega^2 \vec{E}(x, t)) = \vec{0}$$

$$k^2 \vec{E}(x, t) = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2 \vec{E}(x, t)$$

Avec $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ on établit que $k^2 = \omega^2/c^2$. Ainsi :

$$k = \pm \frac{\omega}{c}$$

Pour une onde progressive, on vérifie que :

$$k = \frac{\omega}{c}$$

Q.4- Compte tenu du fait que le champ électrique est nul dans un conducteur parfait, par continuité :

$$\vec{E}(0, t) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{E}(L, t) = \vec{0}$$

En explicitant :

$$\vec{E}(0, t) = E_0 \cos(\omega t) \vec{u}_y = \vec{0}$$

Pour que cette relation soit vérifiée quel que soit t il faut que $E_0 = 0$.

Q.5- On considère un champ électrique $\vec{E}(x, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kx) \vec{u}_y$: ce champ, produit d'une fonction de la variable t par une fonction de la variable x est caractéristique d'une onde stationnaire.

Q.6- Pour $x = 0$; on vérifie que :

$$\vec{E}(0, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(0) \vec{u}_y = \vec{0}$$

Q.7- Pour $x = L$:

$$\vec{E}(L, t) = 2E_0 \sin(\omega t) \sin(kL) \vec{u}_y$$

La condition aux limites $\vec{E}(L, t) = \vec{0}$ impose que $\sin(kL) = 0$. On en déduit que $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. En posant que $k = 2\pi/\lambda$ on vérifie que :

$$L = \frac{n\lambda}{2}$$

II. Résonance d'un tube acoustique ouvert à ses deux extrémités

Q.8- Par analogie, posons que :

$$f = \frac{c_{son}}{\lambda}$$

Pour la fréquence de rang n :

$$f_n = \frac{c_{son}}{\lambda_n} \quad \text{avec} \quad \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

On établit que :

$$f_n = \frac{nc_{son}}{2L}$$

Q.9- Pour $n = 1$:

$$f_1 = \frac{c_{son}}{2L}$$

A.N. : $f_1 = 247 \text{ Hz}$

Q.10- Pour $f_1 = 247 \text{ Hz}$ la note est un Si² (« Si » deuxième octave).

III. Son produit par une clarinette

Q.11- Dans le spectre fourni dans l'énoncé, on peut identifier la fréquence fondamentale $f_1 = 0,20 \text{ kHz}$ et un ensemble d'harmonique (très riche). Dans l'hypothèse que la clarinette puisse être modélisée par un tube ouvert à ses deux extrémités, la formule (3) serait vérifiée et on aurait :

$$f_1 = \frac{c_{son}}{2L}$$

Soit :

$$L = \frac{c_{son}}{2f_1}$$

A.N. : $L = 87 \text{ cm}$

Q.12- Cette valeur ne correspond pas à celle fournie dans l'énoncé donc le modèle n'est pas vérifié. Pour mesurer la fréquence fondamentale avec plus de précision, on peut mesurer la fréquence du $n^{ième}$ harmonique et poser que $f_n = n \cdot f_1$.

Pour $n = 47$: $f_n = 6,80 \text{ KHz}$ donc $f_1 = 145 \text{ Hz}$ et $L = 1,19 \text{ m}$. On constate que la longueur calculée est quasiment 2 fois supérieure à la longueur de la clarinette. Ceci correspond au modèle d'un tube ouvert à l'une de ses extrémités et fermé à l'autre.

En effet, dans cette situation :

$$L = \frac{\lambda}{4} \text{ un demi fuseau pour la fréquence fondamentale}$$

$$f_1 = \frac{c_{son}}{\lambda} = \frac{c_{son}}{4L}$$

$$L = \frac{c_{son}}{4f_1} = 59,6 \text{ cm} : \text{proche de la longueur réelle}$$

Problème n°3 : Mesure de la vitesse des ondes ultra sonores dans l'air

Q.1- On peut identifier différentes sources d'incertitude :

- Incertitude de lecture, liée à l'utilisation d'une règle graduée
- Incertitude liée au fait que les récepteurs ne sont pas exactement orthogonaux à l'axe de déplacement
- Incertitude liée à la projection « orthogonale » de la position du récepteur sur l'axe gradué
- Incertitude liée à l'assimilation du récepteur à un point (quel point ?)
- Incertitude liée à la parallaxe, c.à.d. au fait que les deux récepteurs ne sont pas sur le même axe que l'émetteur
- Incertitude liée au fait que le signal du récepteur B est synchronisé sur le récepteur A (et non sur l'émetteur)
- Incertitude sur la détection des phases des signaux en mode balayage (plus précis en mode XY).
- Incertitude sur la fréquence imposée par le GBF

Q.2- On note x_1 et x_2 les positions du récepteur B lues sur la règle graduée et $x_2 - x_1 = d = 10 \cdot \lambda$. Mesures : $x_1 = 149,5 \text{ mm}$ et $x_2 = 237,5 \text{ mm}$ donc :

$$\lambda = 8,80 \text{ mm}$$

Pour une lecture faite sur une règle graduée en millimètre ($\Delta = 1 \text{ mm}$) :

$$u(x) = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}}$$

Avec $d = x_2 - x_1$, à partir du formulaire fourni en fin d'énoncé :

$$u(d) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}$$

Avec :

$$u(x_1) = u(x_2) = \frac{\Delta}{2\sqrt{3}}$$

$$u(d) = \sqrt{\left(\frac{\Delta}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{2\left(\frac{\Delta}{2\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{\Delta\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$$

Avec $d = 10.\lambda$:

$$u(\lambda) = \frac{u(d)}{10}$$

A.N. : si on garde un CS pour l'incertitude-type : $u(d) = 0,4 \text{ mm}$ et $u(\lambda) = 0,04 \text{ mm}$

Q.3- Sachant que $c = \lambda f$, la vitesse des ondes ultrasonores dans l'air à la température de 27° est :

$$c = 352 \text{ m.s}^{-1}$$

Si on néglige l'incertitude sur la fréquence, à partir du formulaire proposé on peut écrire que :

$$\frac{u(c)}{c} = \frac{u(\lambda)}{\lambda}$$

Soit :

$$u(c) = \left(\frac{c}{\lambda}\right) u(\lambda) = f u(\lambda)$$

A.N. : avec un CS : $u(c) = 2 \text{ m.s}^{-1}$

Ecart normalisé :

$$E_N = \left| \frac{352 - 347}{2} \right| = 2,5$$

Le résultat de cette mesure est peu satisfaisant car $E_N < 2$. Ceci résulte certainement d'une sous-estimation des incertitudes dans les mesures et du fait que la célérité du son dans l'air à 27° est légèrement supérieure à 347 m.s^{-1} (le modèle du gaz parfait conduit à une célérité du son dans l'air de 348 m.s^{-1} à 27°).