Devoir surveillé n° 3

Mécanique

- *La durée de l'épreuve est de 3 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.*
- *L'usage de la calculatrice est autorisé.*
- *Les numéros de questions et les résultats doivent ressortir de votre copie (pas de rédaction monochrome).*
- *Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.*
- *Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.*
- *Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*

Problème 1 Se peser sur Terre et dans l'espace

Dans ce problème, nous allons étudier la pesanteur sur Terre et dans la station spatiale internationale, puis expliquer comment un spationaute peut se peser en impesanteur (ou apesanteur).

Dans toute cette partie, nous allons considérer que le référentiel géocentrique est galiléen et nous appellerons O le centre de la Terre.

Données :

- Constante de gravitation : $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
- Rayon de la Terre : $R_T = 6{,}4 \times 10^3\,\mathrm{km}$
- Masse de la Terre : $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$
- Vitesse de rotation de la Terre sur elle-même : $\Omega = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$

A La pesanteur sur Terre

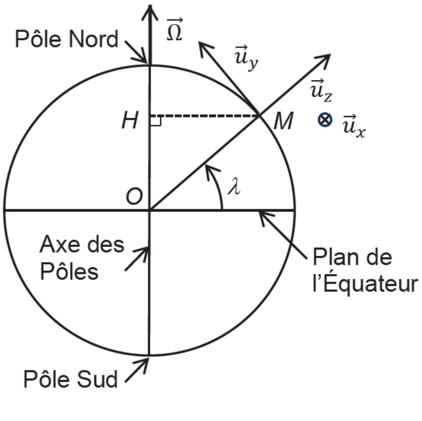
A.1 Définir ce qu'est un référentiel, puis un référentiel galiléen.

A.2 Définir le référentiel géocentrique et le référentiel terrestre. Décrire le mouvement du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique.

A.3 À quelle condition peut-on considérer que le référentiel terrestre est galiléen ?

A.4 Rappeler l'expression vectorielle de la force de gravitation exercée par la Terre sur un objet M de masse m. On définira les différents termes.

On considère le référentiel géocentrique galiléen et le référentiel terrestre non galiléen. Dans ce cas, l'étude statique d'un objet de masse m dans le référentiel terrestre peut se faire à l'aide des lois de Newton en ajoutant une force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}$ où Ω est la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même et le point H le projeté de M sur l'axe de rotation de la Terre (figure ci-dessous).



A.5 À la latitude de Rennes ($\lambda = 48\,°$), calculer les valeurs numériques des normes de la force gravitationnelle et de la force d'inertie d'entraînement qui s'exercent sur une personne immobile pesant $m = 75\,\mathrm{kg}$. Commenter.

A.6 Proposer une méthode expérimentale simple utilisant la mesure de l'élongation d'un ressort de raideur k connue pour mesurer la masse d'un objet sur Terre. Faire un schéma explicatif et établir la formule permettant de déterminer la masse de l'objet à partir de l'élongation du ressort.

B La pesanteur dans la Station Spatiale Internationale (ISS)

Sur le site internet de la Cité de l'Espace (www.cite-espace.com), on lit « Totalisant actuellement un peu plus de 400 tonnes orbitant à environ 400 km d'altitude à la vitesse de 28 000 km/h, l'ISS est la plus grande structure jamais assemblée dans l'espace et elle héberge des laboratoires pour y mener des expériences scientifiques impossibles à réaliser sur Terre. »

On considère que l'ISS assimilé à un point I est en mouvement de rotation uniforme à la vitesse $v = 28 \times 10^3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ dans le plan équatorial du référentiel géocentrique galiléen de centre O.

B.1 Représenter la trajectoire de l'ISS sur un schéma en y faisant apparaître R_T, l'altitude de l'ISS h. Définir un repère de coordonnées polaires, puis définir le vecteur position $\overrightarrow{OI}$ dans cette base polaire en fonction des données.

B.2 Calculer les vecteurs vitesse et accélération dans la base polaire en fonction de R, h, v et des vecteurs unitaires de la base polaire.

B.3 En appliquant la deuxième loi de Newton à l'ISS assimilé à un point matériel I de masse m_I, déterminer l'expression de la norme de la vitesse de l'ISS en fonction de G, M_T, R_T et h.

B.4 Faire l'application numérique et vérifier la vitesse annoncée pour l'ISS dans l'article de la Cité de l'Espace.

On utilisera par la suite la valeur proposée pour la vitesse de l'ISS : $v = 28 \times 10^3\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.

B.5 Quelle est la période de révolution de l'ISS autour de la Terre ? En déduire sa vitesse angulaire ω.

On va maintenant étudier un spationaute, assimilé à un point matériel M de masse m, dans le référentiel lié à la station spatiale internationale (ISS). Le mouvement du référentiel lié à l'ISS est en rotation uniforme dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. En effet, la grande coupole de verre, d'où les spationautes prennent des photos de la Terre, est toujours dirigée vers la Terre.

Le référentiel de l'ISS est non galiléen, mais l'étude d'un point matériel en équilibre peut se faire un ajoutant au bilan des forces une force d'inertie d'entraînement : $\overrightarrow{f}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{OM}$ où ω est la vitesse de rotation de l'ISS par rapport à la Terre.

B.6 Faire le bilan des forces du spationaute dans l'ISS, puis faire l'application numérique de la norme de la résultante des forces quand le spationaute est situé au centre de gravité I de la station spatiale puis justifier que le spationaute est en impesanteur (ou apesanteur) dans la station spatiale.

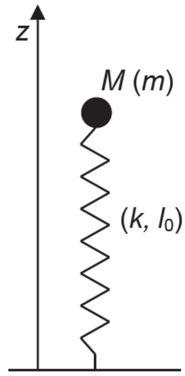
C Se peser dans la station spatiale

Comme les spationautes ont une activité physique beaucoup plus faible que sur Terre à cause de l'impesanteur, ils ont tendance à perdre de la masse musculaire, et même de la masse osseuse. Il est donc important de les peser régulièrement pour faire un suivi de cette perte de masse.

C.1 Expliquer pourquoi la méthode proposée à la question A.6 ne peut pas convenir pour peser un spationaute dans l'ISS.

La solution qui a été retenue pour peser les spationautes en impesanteur est d'utiliser les oscillations d'un ressort.

Le spationaute M de masse m_2 s'accroche à un dispositif appelé BMMD (voir figure ci-dessous) de masse mobile $m_1 = 12{,}43\,\mathrm{kg}$. Ce dispositif inclut aussi un ressort de raideur k, et on peut le modéliser comme sur la figure ci-dessous, où m désigne la masse du dispositif et du spationaute centré en M. On négligera les frottements.



Spationaute sur le BMMD (Body Mass Measurement Device)

Modélisation

C.2 En appliquant la deuxième loi de Newton au système {dispositif + spationaute}, montrer que l'équation différentielle du mouvement du système s'écrit :

$$m\ddot{z} + kz = k\ell_0$$

C.3 Résoudre cette équation en considérant $z(0) = \ell_0 + a$ et $\dot{z}(0) = 0$.

C.4 Déterminer la relation existant entre la période propre des oscillations et la masse m.

C.5 Si la période d'oscillation pour le dispositif à vide vaut $T_1 = 0{,}82\,\mathrm{s}$ et celle avec le spationaute qui s'y accroche vaut $T = 2{,}15\,\mathrm{s}$, déterminer la formule littérale, puis la valeur numérique de la masse m_2 du spationaute qui se pèse.

C.6 En fait, les mesures de périodes ne sont pas infiniment précises. L'incertitude-type sur T_1 et sur T est la même et vaut $u(T) = 2{,}9\,\mathrm{ms}$, celle sur la masse m vaut $u(m) = 2{,}9\,\mathrm{g}$. On veut maintenant calculer l'incertitude-type sur m_2 par la méthode de Monte-Carlo. Après avoir expliqué en quelques lignes à quoi correspond cette méthode de propagation des incertitudes, compléter le script Python ci-dessous pour qu'il calcule l'incertitude-type sur m_2 notée `um2`.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd #tirage aléatoire selon une loi définie
m1 = 12.43 # kg
um = 2.9e-3 # kg
T1 = 0.82 # s
T = 2.15 # s
uT = 2.9e-3 # s
N = 100000 # nombre de points à utiliser pour les calculs
m1_MC = rd.normal(m1,um,N) # tirage de N nombres autour de m1 avec un écart-type um
T1_MC = rd.normal(T1,uT,N)
T_MC = rd.normal(T,uT,N)
m2_MC =             # à compléter
um2 =             # à compléter
print(um2)
```

C.7 L'utilisation du BMMD exige du spationaute qu'il se maintienne fortement à la barre, que ses pieds et ses genoux soient coincés et son menton collé à la planche. Expliquer pourquoi.

Problème 2 Navigation nautique

Les différentes parties de ce problème sont totalement indépendantes.

A Préliminaire - mille nautique et nœud

A.1 Les distances en mer sont évaluées en milles nautiques. Le mille nautique, qui sera noté M, correspond à 1852 mètres. En assimilant la Terre à une sphère de rayon $R_T = 6371\,\mathrm{km}$, déterminer l'expression de l'angle θ (de latitude) qui correspond à une distance parcourue suivant un arc de méridien de $d = 1\,\mathrm{M}$. Faire l'application numérique en exprimant cet angle θ en minute d'angle (on rappelle que $1\,' = \frac{1}{60}{}^\circ$). Conclure sur l'intérêt de cette unité lorsque l'on utilise des cartes exploitant latitude et longitude.

A.2 Déterminer la fréquence d'ondes électromagnétiques dont la longueur d'onde dans le vide vaut 1,0 M. On prendra une valeur approchée avec deux chiffres significatifs pour la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide. À quel domaine des ondes électromagnétique cette fréquence appartient-elle ?

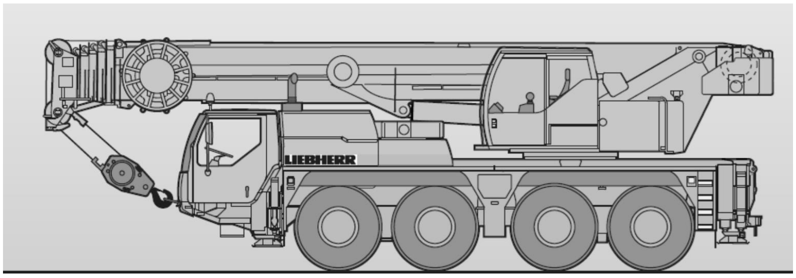
A.3 Les vitesses (du vent ou du bateau) sont exprimées en nœuds, unité que l'on notera nd, avec 1 nd $=1\,\mathrm{M/h}$ (1 mille nautique par heure). Exprimer en $\mathrm{m\,s^{-1}}$ la vitesse correspondant à 30 noeuds (force 7 sur l'échelle Beaufort, avis de grand frais).

B Mise à l'eau d'un bateau

Pour mettre à l'eau un voilier ou déplacer un bateau, la plupart des clubs nautiques louent des camions grues. Pour cette étude, le voilier a les caractéristiques suivantes :

- longueur : 12 m
- largeur : 3,2 m
- masse : $3{,}5 \times 10^3\,\mathrm{kg}$

Tout au long de cette partie, nous prendrons l'accélération de la pesanteur $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.



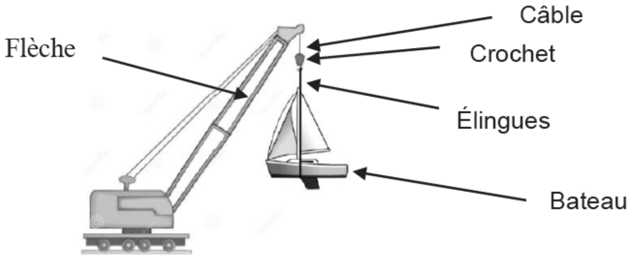
La grue utilisée, représentée sur la figure ci-dessus (Grue Mobile Liebhherr LTM 1070-4.2), a les caractéristiques utiles suivantes pour la partie levage :

- masse du crochet : $m_c = 5{,}0 \times 10^2\,\mathrm{kg}$;
- treuil équipé d'une boîte de vitesse à engrenages planétaires ;
- vitesse d'enroulement maximale du câble : $v_{max} = 1{,}2 \times 10^2\,\mathrm{m\,min^{-1}}$;
- tension maximale du câble : $T_{max} = 56\,\mathrm{kN}$;
- longueur de la flèche déployée : 50 m ;
- capacité de levage maximale retenue : 70 tonnes ;
- treuil : diamètre D du cylindre en une couche de câble : 500 mm, couple de sortie dynamique $23\,\mathrm{kN\,m}$ (le couple dynamique correspond au couple maximum que le treuil peut supporter) ;
- poulie en haut de flèche : diamètre $d_p = 0{,}50\,\mathrm{m}$;
- flèche : treillis métallique, formé de multiples sections triangulaires, qui tourne autour d'un axe vertical. La flèche est l'élément qui permet à l'engin de levage d'avoir une portée et une hauteur suffisantes pour déplacer des charges à des endroits précis.

Le crochet étant une partie de la charge, sa masse doit être prise en compte lors des calculs.

Pour calculer la tension du câble, on suppose que le bateau est suspendu uniformément sur deux élingues, donc que la charge est répartie équitablement sur les élingues. (L'élingue est un élément souple, de masse négligeable, permettant d'attacher le bateau au crochet).

On supposera que la liaison est parfaite entre les élingues et le crochet. Le câble est inextensible.



B.1 Reproduire sommairement le schéma de la figure ci-dessus en y faisant apparaître les forces exercées sur le crochet et calculer la tension T du câble lorsque la charge est à l'équilibre.

B.2 On veut maintenant déterminer la tension T' du câble en phase de levage accéléré. On suppose qu'on lève verticalement le bateau, initialement immobile, d'une hauteur $H = 10$ m sur une durée $t_1 = 1{,}0\,\text{min}$, l'accélération du bateau, notée a, étant constante.

B.2.1 Exprimer la vitesse instantanée v du bateau en fonction de a et du temps t ;

B.2.2 Exprimer la hauteur d'élévation h en fonction de a et du temps t ;

B.2.3 En déduire l'expression de la vitesse instantanée v en fonction de h et du temps t ;

B.2.4 Calculer ainsi la vitesse finale v_f, vitesse atteinte à la fin de cette phase de levage de 10 m ;

B.2.5 Montrer ainsi que la tension du câble T' lors de la phase d'accélération est numériquement peu différente de T.

B.3 En utilisant les caractéristiques de la grue :

B.3.1 Déterminer, en fonction de $T_{\max}$ (tension maximale du câble), m, g et m_c, l'expression littérale de $a_{\max}$, accélération maximale supposée constante, pour ne pas dépasser cette tension maximale ;

B.3.2 Calculer la valeur de $a_{\max}$;

B.3.3 Calculer la vitesse v_{thmax} atteinte lors de cette élévation de hauteur $H = 10\,\text{m}$ avec l'accélération déterminée précédemment ;

B.3.4 Comparer cette vitesse v_{thmax} avec la vitesse v_f calculée précédemment et aux données de la grue.

C Manœuvre au moteur

Un navire, de masse $m = 10 \times 10^3$ tonnes, file en ligne droite, à la vitesse $v_0 = 15\,\text{noeuds}$. La force de résistance exercée par l'eau sur la coque du bateau à une norme du type : $F = kv^2$ où k est une constante et v la vitesse du bateau. On rappelle qu'un nœud correspond à 1 mille nautique par heure et que le mille nautique est égal à 1852 m.

On se place dans un référentiel lié au port qui sera supposé galiléen.

C.1 Donner le lien entre la puissance fournie par le moteur $\mathcal{P}$ et la force motrice exercée par le moteur sur le bateau $\overrightarrow{F}_m$.

C.2 Calculer la constante k sachant que le moteur fournit une puissance de $\mathcal{P} = 5{,}0\,\text{MW}$ à la vitesse v_0.

C.3 Le navire stoppe ses machines à la distance X au large de la passe d'entrée d'un port.

Montrer que l'expression de la vitesse du navire en fonction du temps t s'écrit $v(t) = \dfrac{v_0 b}{b + v_0 t}$ où b est une constante que l'on exprimera en fonction de m et de k.

C.4 En déduire la distance X parcourue par le navire en fonction de b, v_0 et v_P, la vitesse au niveau de la passe.
Calculer cette distance si on désire atteindre la passe à la vitesse de 2,0 noeuds.

C.5 Déterminer le temps t_P mis pour atteindre la passe.

C.6 Déterminer la vitesse, v_Q, à l'arrivée à quai, un demi-mille au-delà de la passe d'entrée ? On la calculera en nœuds puis en m/s.

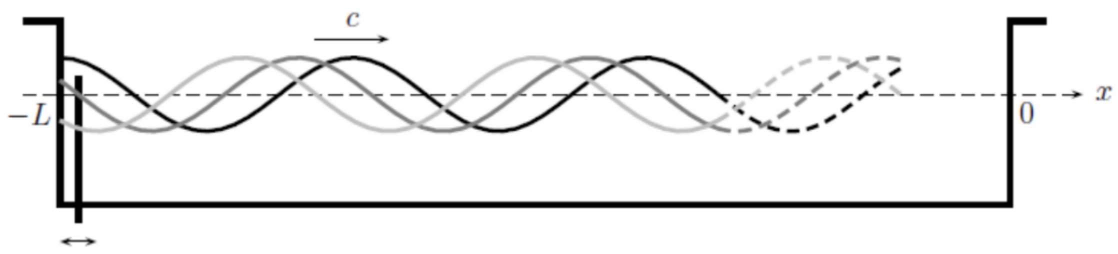
C.7 Quelle est la solution d'urgence pour arrêter le bateau ?

D Réalisation de vagues par l'utilisation d'une plaque oscillante

Afin d'étudier le comportement d'un bateau soumis à la houle, on réalise des vagues dans un bassin (piscine) par le déplacement horizontal d'un panneau métallique vertical. La superposition de cette onde avec l'onde réfléchie à l'autre bout de la piscine produira une onde stationnaire.

On rappelle la relation : $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

D.1 Les oscillations à la pulsation ω du plateau métallique permettent de produire une variation sinusoïdale de la hauteur $z_i(-L,t) = Z_m cos(\omega t)$ du point de la surface de l'eau situé à l'extrémité gauche de la piscine, en $x = -L$. Il apparaît une onde progressive incidente que l'on supposera sinusoïdale et se déplaçant sans atténuation dans le sens des x croissants à la célérité c.



D.1.1 Rappeler la relation entre la norme du vecteur d'onde k, la pulsation ω et la célérité c.

D.1.2 Cette onde incidente est caractérisée par la hauteur d'eau $z_i(x,t)$. Donner l'expression de $z_i(x,t)$ en fonction, entre autres, de ω, c et de la phase initiale (à $t = 0$) à l'origine (en $x = 0$) notée φ_0.

D.1.3 Déterminer φ_0 en fonction de k et L.
On utilisera dans la suite l'expression en fonction de k et L.

D.1.4 Donner l'expression de $z_i(x, T/4)$ où T est la période temporelle d'oscillation de la plaque. Tracer son allure pour x compris entre $-L$ et 0 dans le cas où $L = \frac{7\lambda}{4}$ où λ est la période spatiale des oscillations de la surface de l'eau.

D.2 À l'extrémité d'abscisse $x = 0$ de la piscine, apparaît une onde réfléchie progressive sinusoïdale caractérisée par une hauteur $z_r(x,t)$. Déterminer l'expression de $z_r(x,t)$ en fonction des données en admettant que :

— les ondes incidente et réfléchie présentent la même amplitude,

— les ondes incidente et réfléchie sont en phase en $x = 0$.

D.3 Vague résultante

D.3.1 Montrer que l'expression de la hauteur d'eau associée à l'onde résultante $z(x,t) = z_i(x,t) + z_r(x,t)$ peut se mettre sous la forme : $z(x,t) = 2Z_m \cos(\omega t - kL)\cos(kx)$.

D.3.2 A quel point particulier de l'onde stationnaire correspond l'abscisse $x = 0$?

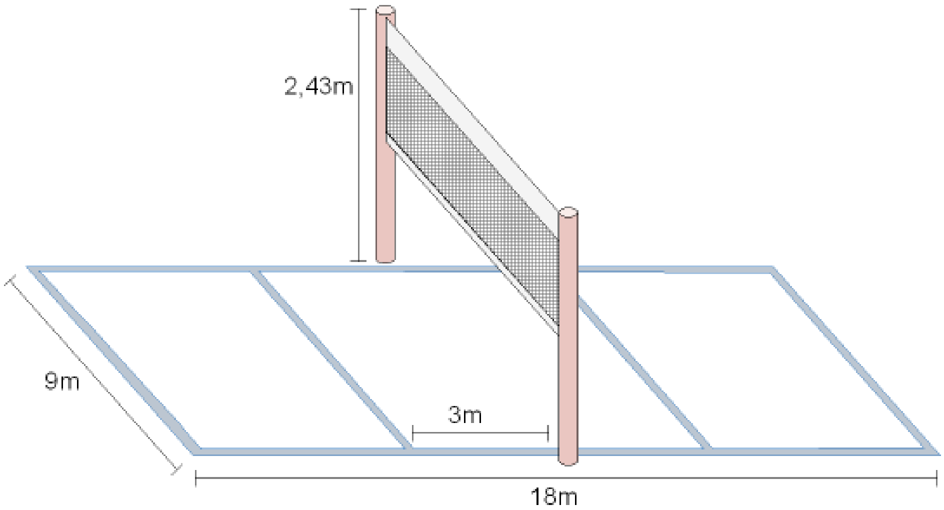
D.3.3 En $x = -L$, le panneau métallique impose un nœud de vibration. Déterminer la relation liant λ et L.

D.3.4 Représenter l'allure de la surface de la piscine pour le troisième mode de vibration possible, et ce, à différents instants.

D.3.5 Pour ce mode de vibration, quelle devrait être la longueur L de la piscine si l'on prend pour célérité $c = 4,0$ m.s^{-1} et une période d'oscillation de la plaque métallique $T = 3,0$ s ?

Problème 3 Le service du volleyeur Wilfredo León

Wilfredo León est un joueur cubano-polonais de volley-ball reconnu internationalement notamment pour la qualité de ses services où la vitesse de la balle peut atteindre une vitesse supérieure à $130\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ (record à $138\,\mathrm{km\,h^{-1}}$) tout en retombant dans le terrain adverse.



Le terrain d'un volley est long de 18 m, large de 9 m et la hauteur du filet (situé au milieu du terrain) s'élève à 2,43 m pour les hommes. Lors du service, le joueur s'élance, saute derrière la ligne puis smashe le ballon pour que celui-ci retombe dans le terrain adverse en étant passé au dessus du filet. Les très bons joueurs peuvent frapper la balle lors des sauts à des hauteurs comprises entre 3,1 m et 3,5 m

Données : Le ballon de volley a une masse $m = 0{,}27\,\mathrm{kg}$ et un diamètre $D = 21\,\mathrm{cm}$.

1. On néglige dans un premier temps les frottements de l'air. Modéliser le problème et déterminer les caractéristiques d'un service réussi (position initiale du ballon, angle de frappe...) lorsque la vitesse initiale du ballon est de l'ordre de 130 km/h. Conclure.

   Cette question est un problème ouvert, on attend de vous de l'initiative et une rédaction qui permet de suivre vos raisonnements...

On considère désormais que l'air exerce une force sur le ballon qui s'écrit $\vec{f}_a = -C_D \rho S v \vec{v}$, où $C_D = 0,5$, $\rho = 1{,}2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ la masse volumique de l'air, S la surface apparente du ballon et v la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ du ballon.

2. Appliquer la deuxième loi de Newton au ballon, puis en déduire les équations différentielles du mouvement vérifiées par la position du ballon.
3. Définir une fonction sous python permettant de définir ces équations dans le but de les résoudre à l'aide de la fonction `odeint` de la librairie `scipy.integrate` (on attend uniquement le code python de la fonction qui traduit les équations différentielles du mouvement et on supposera que les données de l'énoncé sont stockées dans des variables globales préalablement définies sous python).