

Correction du devoir surveillé n° 3

Problème 1 Se peser sur Terre et dans l'espace

A La pesanteur sur Terre

A.1 Un référentiel est un repère d'espace associé à une base de temps. Un référentiel galiléen est un référentiel dans lequel un point matériel isolé à un mouvement de translation rectiligne uniforme.

A.2 Le référentiel géocentrique a pour origine le centre de la Terre et 3 axes orientés vers des étoiles lointaines. Le référentiel terrestre a pour origine un point à la surface de la Terre et des axes immobiles par rapport à la surface de la Terre, il est en mouvement de rotation autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique avec une période de rotation de $T=23$ h 56 min.

A.3 Le référentiel terrestre peut être considéré galiléen si le temps de l'expérience envisagée est très court devant la période de rotation de la Terre sur elle-même. Cela revient à considérer que le mouvement relatif du référentiel terrestre par rapport au référentiel géocentrique est un mouvement de translation rectiligne uniforme.

A.4 $\boxed{\vec{F}_G = -\frac{GmM_T}{R_T^2} \vec{u}_r}$ où $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ avec G la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre et R_T le rayon de la Terre.

A.5 $\|\vec{f}_{ie}\| = m\Omega^2 R_T \cos \lambda = 1,7 \text{ N}$
 $\|\vec{F}_G\| = \frac{GmM_T}{R_T^2} = 7,3 \times 10^2 \text{ N}$

La force d'inertie d'entrainement a une valeur très faible par rapport à la force de gravitation ; elle peut généralement être négligée et on peut considérer le référentiel terrestre comme quasi galiléen dans de nombreuses situations pour lesquelles on ne cherche pas une précision élevée. Sa prise en compte dans la définition du poids $\vec{P} = \vec{F}_G + \vec{F}_{ie}$ va apporter une correction minimale.

A.6 On accroche verticalement l'extrémité d'un ressort à un support fixe tandis qu'à l'autre extrémité est attaché l'objet de masse m à déterminer. À l'équilibre de la masse m dans le référentiel terrestre supposé galiléen, on $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$ avec $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z$ le poids de la masse, et $\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z$ la tension du ressort de longueur à vide ℓ_0 et de longueur ℓ .

On peut mesurer la position de l'extrémité du ressort avec et sans la masse pour en déduire l'élongation : $\Delta\ell$ puis remonter à la masse avec l'équation d'équilibre : $\boxed{m = \frac{k\Delta\ell}{g}}$.

B La pesanteur dans la Station Spatiale Internationale (ISS)

B.1 schéma ou apparaît R_T , h , \vec{u}_r et \vec{u}_θ , $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OI}}{OI}$ et \vec{u}_θ est perpendiculaire à \vec{u}_r et orienté dans le sens des θ croissants $\boxed{\overrightarrow{OI} = (R_T + h)\vec{u}_r}$

B.2 $\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OI}}{dt} = v\vec{u}_\theta}$, $\vec{v} = (R_T + h)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$ soit $\dot{\theta} = \frac{v}{R_T + h}$. et $\boxed{\vec{a} = \frac{dv}{dt} = -\frac{v^2}{R_T + h}\vec{u}_r}$.

B.3 On applique la deuxième Newton dans le référentiel géocentrique supposé galiléen : $m\vec{a} = -G\frac{M_T M_S}{r^2}\vec{u}_r$ soit en projetant suivant la direction radiale : $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}}$

B.4 L'application numérique donne $v_0 = 6,7 \text{ km s}^{-1} \approx 28 \times 10^3 \text{ km h}^{-1}$. On retrouve bien la valeur attendue.

B.5 Le mouvement étant circulaire uniforme, l'ISS parcourt la distance $2\pi(R_T + h)$ pendant la période de révolution de l'ISS autour de la Terre, soit $T = \frac{2\pi(R_T + h)}{v_0} = 1,5 \text{ h}$ Sa vitesse angulaire s'écrit $\omega = \dot{\theta} = \frac{v_0}{R_T + h} = \frac{2\pi}{T} = \frac{GM_T}{\sqrt{(R_T + h)^3}} = 1,1 \times 10^{-3} \text{ rad s}^{-1}$.

B.6 Système : spationaute de masse m , étudié dans le référentiel de l'ISS non galiléen car en rotation uniforme par rapport au référentiel géocentrique (à la vitesse angulaire de rotation ω). On suppose le spationaute au centre de gravité I de la station, donc à l'altitude h . Il est soumis à la force gravitationnelle : $\vec{F}_G = -\frac{GmM_T}{(R_T+h)^2} \vec{u}_r$ avec $\vec{u}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$ et la force d'inertie d'entraînement : $\vec{f}_{ie} = m\omega^2 \overrightarrow{OM}$ avec $\omega^2 = \frac{GM_T}{(R_T+h)^3}$ soit $\vec{f}_{ie} = \frac{GmM_T}{(R_T+h)^2} \vec{u}_r = -\vec{F}_G$. La résultante des forces est donc nulle. En l'absence de force de contact, le spationaute est en impesanteur (ou apesanteur) dans la station spatiale.

C Se peser dans la station spatiale

C.1 D'après la question précédente, le spationaute est en impesanteur : son poids est nul quelle que soit sa masse, l'élongation du ressort serait donc toujours nulle, ne permettant pas d'accéder à la masse.

C.2 On considère le système {dispositif + spationaute} assimilé à un point matériel dans le référentiel de l'ISS non galiléen. Il est soumis à la force de gravitation \vec{F}_G , à la force d'inertie d'entraînement \vec{f}_{ie} et à la tension du ressort $\vec{T} = -k(z - \ell_0)$. L'application de la deuxième loi de Newton donne : $m\vec{a} = \vec{F}_G + \vec{f}_{ie} + \vec{T}$. La projection de cette relation suivant \vec{u}_z donne ($\vec{f}_{ie} + \vec{F}_G = \vec{0}$) :

$$m\ddot{z} + kz = k\ell_0$$

C.3 On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ avec un second membre constant. La solution s'écrit $z(t) = K_1 \cos(\omega_0 t) + K_2 \sin(\omega_0 t) + \ell_0$ avec K_1 et K_2 deux constantes d'intégration qui se déterminent à partir des conditions initiales : $z(0) = \ell_0 + a$ et $\dot{z}(0) = 0$. On en déduit $K_1 = a$ et $\dot{z} = -K_1\omega_0 \sin(\omega_0 t) + K_2\omega_0 \cos(\omega_0 t)$, soit $K_2 = 0$. On obtient alors $z(t) = a \cos \omega_0 t + \ell_0$

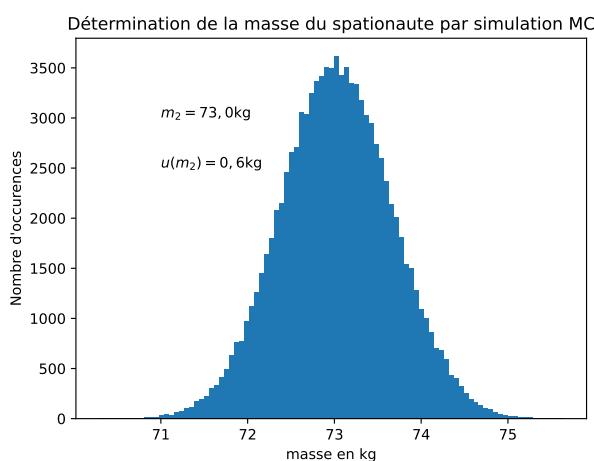
C.4 La période propre des oscillations s'écrit $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.

C.5 À vide la période propre des oscillations s'écrit $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}}$ et lorsque le spationaute s'y accroche vaut $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1+m_2}{k}}$. En faisant le rapport de ces deux expressions et en mettant au carré, on obtient :

$$\frac{m_1+m_2}{m_1} = \frac{T^2}{T_1^2} \text{ soit } m_2 = \left(\frac{T^2}{T_1^2} - 1 \right) m_1 = 73 \text{ kg} \quad (\text{le nombre de CS dépendent de la question suivante}).$$

C.6 La simulation Monte-Carlo fournit plusieurs résultats possibles et la probabilité de chacun d'entre eux à partir de la construction d'un vaste ensemble d'échantillons de données aléatoire. On complète la ligne 12 par l'expression trouvée précédemment et la ligne 13 pour déterminer l'écart type de `m2_MC`.

```
12. m2_MC =(T_MC**2/T1_MC**2-1)*m1_MC # à compléter
13. um2 = np.std(m2_MC, ddof=1) # Détermination de l'écart type
```



C.7 Dans le modèle utilisé C.2, le système est assimilé à un point matériel, alors qu'il s'agit en réalité d'un solide. Cette modélisation est correcte dans le cas d'un solide indéformable dont le centre de masse correspond alors au point étudié. Si le spationaute ne se tient pas fortement, le solide devient déformable, en particulier dans le cadre de l'impesanteur. Le modèle n'est alors plus pertinent, introduisant une erreur sur la mesure.

Problème 2 Navigation nautique

A Préliminaire - mille nautique et noeud

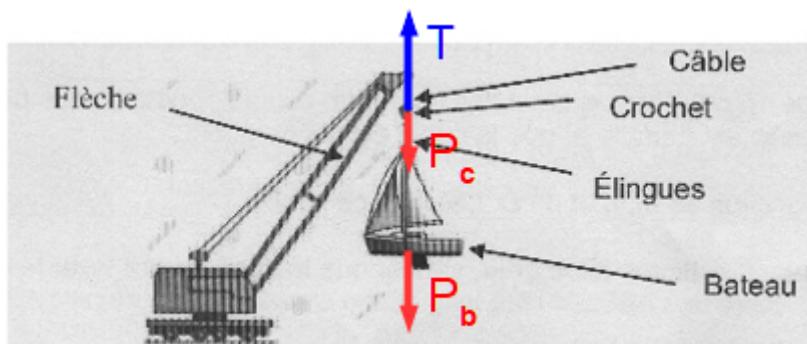
A.1 $d = R_T \theta$ soit $\theta = \frac{d}{R_T} = 2,9 \times 10^{-4}$ rad = $1,0'$. Sur une carte nautique, tout changement de latitude de 1 minute d'angle correspond à une distance de 1 mille nautique.

A.2 $f = \frac{c}{\lambda}$ avec $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ et $\lambda = 1,0 \text{ M}$ soit $f = 1,6 \times 10^2 \text{ kHz}$. cette fréquence appartient au domaine des ondes radio.

A.3 On effectue la conversion d'unité : $30 \text{ nd} = 30 \text{ M/h} = 15 \text{ m s}^{-1}$.

B Mise à l'eau d'un bateau

B.1 Le système {bateau+crochet} est soumis dans le référentiel terrestre supposé galiléen au poids du crochet \vec{P}_c , au poids du bateau \vec{P}_b transmis par les élingues et à la tension du câble \vec{T} .



À l'équilibre, $\vec{P}_b + \vec{P}_c + \vec{T} = \vec{0}$ donc $[T = (m + m_c)g]$ soit numériquement : $[T = 40 \text{ kN}]$. (Ceci est bien inférieur à 56 kN.)

B.2 levage accéléré d'une hauteur $H = 10 \text{ m}$ sur une durée $t_1 = 1,0 \text{ min}$:

B.2.1 Par intégration de l'accélération $v(t) = at + cte$ et comme la vitesse initiale est nulle $\boxed{v(t) = at}$.

B.2.2 On intègre de nouveau et on trouve (toujours en prenant $h(0) = 0$) $\boxed{h(t) = \frac{at^2}{2}}$.

B.2.3 En utilisant les expressions précédentes, on en déduit $\boxed{v(t) = \frac{2h}{t}}$

B.2.4 $v_f = \frac{2h}{t_f} = 20 \text{ m min}^{-1}$ (c'est bien inférieur aux 120 m/min)

B.2.5 On applique la deuxième loi de Newton au système{crochet,bateau} dans le référentiel terrestre supposé galiléen $\vec{P}_b + \vec{P}_c + \vec{T} = (m + m_c)\vec{a}$ soit $T' = (m + m_c)(g + a)$ avec $a = \frac{v_f}{t_1} = 5,5 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2} \ll g$, ainsi $T' \approx T$.

B.3 Caractéristiques de la grue :

B.3.1 On reprend la projection de la deuxième loi de Newton de la question précédente : $-(m + m_c)g + T_{max} = (m + m_c)a_{max}$. Pour ne pas dépasser la tension maximale, on doit donc avoir :

$$\boxed{a_{max} = \frac{T_{max}}{m + m_c} - g}.$$

B.3.2 AN : $a_{max} = 4,0 \text{ m s}^{-2}$.

B.3.3 En utilisant les résultats de la question B2, on trouve $\boxed{v_{thmax} = \sqrt{2a_{max}H}}$. Numériquement, on trouve $\boxed{v_{thmax} = 8,9 \text{ m s}^{-1}}$.

B.3.4 On a $v_{thmax} \gg v_f$ (environ 25 fois plus grande). On remarque que la vitesse maximale annoncée par le constructeur est près de 5 fois plus petite que cette vitesse théorique maximale. On peut supposer qu'il y a une certaine marge de sécurité.

C Manœuvre au moteur

C.1 $\mathcal{P} = \vec{F}_m \cdot \vec{v}$.

C.2 On considère le navire dans le référentiel lié au port, supposé galiléen. Le navire se déplace en ligne droite à vitesse constante suivant la direction \vec{u}_x , alors $\vec{a} = \vec{0}$.

Les forces horizontales qui s'exercent sur le navire sont la force de résistance exercée par l'eau $\vec{F} = -kv^2\vec{u}_x$ et la force de propulsion du moteur $\vec{F}_m = \frac{P}{v}\vec{u}_x$. Les deux autres forces qui s'exercent sur le navire sont le poids et la poussée d'Archimède, toutes deux verticales. La projection de la deuxième loi de Newton suivant la direction du mouvement (Ox) conduit à $F_x + F_{mx} = 0$ soit $kv_0^2 = \frac{P}{v_0}$ et $k = \frac{P}{v_0^3} = 11 \times 10^3 \text{ kg m}^{-1}$.

C.3 À partir du moment où le navire stoppe ses machines, il n'est plus soumis qu'à la force de frottement de l'eau. La projection de la deuxième loi de Newton projetée sur l'axe du mouvement s'écrit donc : $m \frac{dv}{dt} = -kv^2$ soit $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m}v^2 = 0$. On pose $b = \frac{m}{k}$. En séparant les variables on obtient $\frac{dv}{v^2} = -\frac{dt}{b}$, puis en intégrant entre l'instant $t = 0$ où le navire à une vitesse v_0 et l'instant t où le navire a la vitesse $v(t)$, on obtient : $-\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = -\frac{t}{b}$, soit $v(t) = \frac{v_0 b}{b + v_0 t}$.

C.4 On cherche x , la distance parcourue depuis l'extinction des machines : Puisque $v = \frac{dx}{dt}$, on intègre entre l'état ($t = 0, x = 0$) et l'état (x, t) :

$$dx = \frac{v_0 b}{b + v_0 t} dt \text{ soit } x(t) = b \ln \frac{b + v_0 t}{b}$$

On cherche X , la distance parcourue par le navire lorsqu'il atteint l'entrée de la passe, sa vitesse est alors v_P . On a d'après les expressions précédentes : $X = b \ln \frac{b + v_0 t_P}{b}$ et $v_P = \frac{v_0 b}{b + v_0 t_P}$ avec t_P le temps mis pour atteindre la passe. soit $X = b \ln \frac{v_0}{v_P} = 1,8 \text{ km}$

C.5 En exploitant l'expression de $v(t)$, $t_P = b \left(\frac{1}{v_P} - \frac{1}{v_0} \right) = 7,6 \times 10^2 \text{ s}$ soit une douzaine de minutes.

C.6 On connaît X_Q qui est égal à X plus un demi-mille. En utilisant les relations précédentes, on a $X_Q = b \ln \frac{b + v_0 t_Q}{b}$, soit $t_Q = \frac{b}{v_0 \left(\exp \left(\frac{X_Q}{b} \right) - 1 \right)}$ et $v_Q = \frac{v_0 b}{b + v_0 t_Q} = v_0 \exp \left(-\frac{X_Q}{b} \right)$. L'application numérique donne : $v_Q = 0,75 \text{ noeuds} = 0,38 \text{ m s}^{-1}$

C.7 Pour arrêter d'urgence un bateau, on met les moteurs en marche en sens inverse.

D Réalisation de vagues par l'utilisation d'une plaque oscillante

D.1 onde générée

$$\mathbf{D.1.1} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

D.1.2 L'onde progressive se propageant dans le sens des x croissants, le signal $z_i(x, t)$ s'écrit :

$$z_i(x, t) = Z_m \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

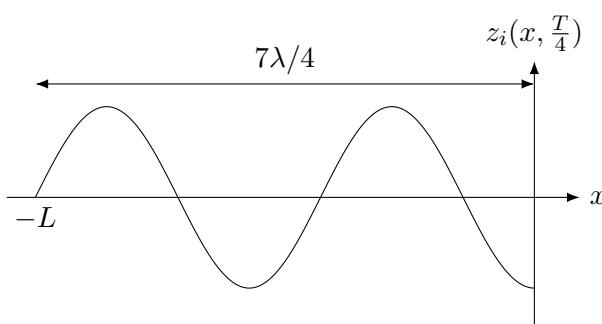
D.1.3 D'après l'expression précédente $z(-L, t) = Z_m \cos(\omega t + kL + \varphi_0)$. Or, l'énoncé précise que $z(-L, t) = Z_m \cos(\omega t)$. On en déduit que $kL + \varphi_0 = 0$,

$$\varphi_0 = -kL$$

$$\mathbf{D.1.4} \quad z_i(x, T/4) = Z_m \cos \left(\frac{2\pi}{T} \frac{T}{4} - kx - kL \right) = Z_m \cos \left(\frac{\pi}{2} - kx - kL \right)$$

$$z_i(x, T/4) = Z_m \sin(kx + kL)$$

On représente l'onde progressive à $t = \frac{T}{4}$:



D.2 L'onde réfléchie se propage dans le sens des x décroissants donc $z_r(x, t) = Z_m \cos(\omega t + kx + \varphi'_0)$. Elle présente un déphasage nul avec l'onde incidente en $x = 0$ de sorte que : $z_r(0, t) = z_i(0, t) = Z_m \cos(\omega t - kL)$, d'où $\varphi'_0 = -kL$:

$$z_r(x, t) = Z_m \cos(\omega t + kx - kL)$$

D.3 Vague résultante

D.3.1 L'onde résultante est associée à une hauteur d'eau $z(x, t) = z_i(x, t) + z_r(x, t)$:

$$\begin{aligned} z(x, t) &= Z_m \cos(\omega t - kx - kL) + Z_m \cos(\omega t + kx - kL) \\ &= 2Z_m \cos\left(\frac{\omega t - kx - kL + \omega t + kx - kL}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega t - kx - kL - \omega t - kx + kL}{2}\right) \\ &\boxed{z(x, t) = 2Z_m \cos(\omega t - kL) \cos(kx)} \end{aligned}$$

On retrouve une forme d'onde stationnaire : les variables x et t sont séparées.

D.3.2 En $x = 0$, $s(0, t) = 2Z_m \cos(\omega t - kL)$, l'amplitude est maximale ce qui signifie que l'on aura un ventre de vibration.

D.3.3 En $x = -L$, on observe un nœud de vibration : $s(-L, t) = 0, \forall t$. Cette condition donne

$$2Z_m \cos(\omega t - kL) \cos(-kL) = 0$$

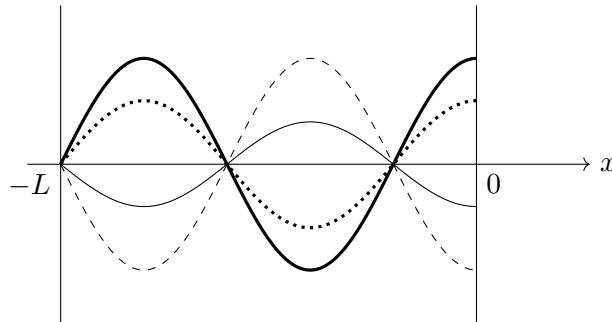
soit $\cos(-kL) = 0$. Les pulsations spatiales vérifiant cette condition sont les k_p telles que

$$k_p L = \frac{\pi}{2} + p\pi \quad \text{où } p \in \mathbb{N}$$

Or $k_p = \frac{2\pi}{\lambda_p}$, soit $\lambda_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{2\pi L}{\frac{\pi}{2} + p\pi}$

$$\lambda_p = \frac{4L}{2p + 1}$$

D.3.4 On représente l'allure du 3^{ème} mode de vibration ie celui correspondant à $p = 2$ à différents instants. On a alors $\lambda_2 = \frac{4L}{5}$.



D.3.5 $L = \frac{5\lambda}{4}$ avec $\lambda = cT$. D'où $\boxed{L = \frac{5cT}{4}}$, A.N. : $L = 15 \text{ m}$

Problème 3 Le service du volleyeur Wilfredo León

On pose H la hauteur du filet, $L_2 = 2L_1$ la distance entre la ligne de service et l'extrémité du terrain (le terrain de chaque équipe à une longueur L_1 et une profondeur L_1). L'objectif de cet exercice est de trouver les paramètres de lancer de balle (hauteur h_F , position x_F , angle initiale α par rapport à une direction horizontale, On prendra la vitesse initiale v_0 égale à 130 km/h) pour que le ballon arrive sur le sol dans le terrain adverse. Dans un premier temps, on négligera les frottements et on considérera que la trajectoire du ballon est plane.

1. On considère que le ballon est assimilé à un point matériel (on néglige ses mouvements de rotations et son extension spatiale) et on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen (système d'axe cartésien où le plan $y = 0$ correspond au sol). À l'instant $t = 0$, le ballon quitte les mains du serveur à une hauteur $y(t = 0) = h$ à une abscisse x_S et une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_y$. Pour $t > 0$, on considère que le ballon n'est soumis qu'à son poids : $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$.

L'application du principe fondamental de la dynamique conduit à $m\vec{a} = m\vec{g}$. En projetant sur \vec{u}_x et \vec{u}_y puis par intégrations successives on trouve alors :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{array} \right. \quad \vec{v} \left| \begin{array}{l} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{array} \right. \quad \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = v_0 \cos \alpha t + x_S \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin \alpha t + h \end{array} \right.$$

On peut dans un premier temps estimer un ordre de grandeur de h pour un lancer horizontal ($\alpha = 0$). L'équation de trajectoire devient alors : $y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x-x_S}{v_0} \right)^2 + h$. La condition pour que le ballon soit dans le terrain conduit à $y(L_2) < 0$ soit $h < \frac{g(L_2-x_S)^2}{2v_0^2}$. Pour $x_S = 1,0$ m, l'application numérique donne $h < 1,1$ m. Le problème est qu'avec une hauteur initiale inférieure à la hauteur du filet et une vitesse initiale horizontale, le ballon ne passera jamais au-dessus du filet... .

On va donc chercher désormais des angles α négatifs et des hauteurs de lancer supérieures au filet. On cherche par exemple l'angle α qui permettrait de réussir un service avec une hauteur d'impact $h = 3,5$ m (hauteur réservée à un spécialiste de grande taille...).

L'équation de la trajectoire devient alors :

$y(x) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x-x_S}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + \tan \alpha (x - x_S) + h$. On résout alors l'équation $y(L_2) < 0$, on obtient alors un trinôme vérifié par la variable $Z = \tan \alpha$ puisque $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$. On obtient $\alpha < -8,0^\circ$, il reste ensuite à vérifier la condition pour que le ballon passe au dessus du filet soit ($y(L_1) > H$). Pour $\alpha = -8,1^\circ$, on trouve $y(L_1) = 2,32$ m. Il est donc difficile de trouver une explication à un service réussi sans tenir compte des frottements... .

La prise en compte des frottements est indispensable pour modéliser le comportement réel d'un ballon de volley lors d'un service. (l'extension spatiale du ballon entraînerait certainement un contact avec le filet...).

2. La deuxième loi de Newton au ballon projetée suivant les différents axes conduit à :

$$m\ddot{x} = -\beta \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

$$m\ddot{y} = -\beta \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} - mg$$

On identifie des équations différentielles couplées non linéaires du second ordre qui ne sont pas résolvables à la main !

3. On vectorialise les équations sous python et on cherche à obtenir la variable `X=np.array([x,y,vx,vy])` à différents instants de calculs en définissant la fonction `Phi` telle que `X'=Phi(X,t)`. `Phi` est définie en langage python par :

```
import numpy as np
def Phi(X,t):
    x,y,vx,vy=X
    return np.array([vx,vy,-beta/m*vx*(vx**2+vy**2)**0.5,
    -beta/m*vy*(vx**2+vy**2)**0.5-g])
```

Le service de Wilfredo Leon

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint
#variables globales utilisées
g=9.81 # gravité
rho=1.2 # densité de l'air en kg/m^3
L=9.14 # longeur du terrain de volleyball en m
x_0=1.14 # position de la balle au moment de l'impact (Le Lanceur frappe la balle en étant pas au dessus de la Ligne de service)
x_1=2.21 # position de la Limite du terrain adverse
Ldiaserv=np.sqrt(1**2+L**2)*distance maximale envisageable pour faire un service en diagonale du terrain (en m)
H=2.43 # hauteur du filet de volley
m=0.27 #masse du ballon de volley en kg
D=0.21 #diamètre du ballon de volley en m
rhoair=1.2 #masse volumique de l'air en kg/m^3
Snp=pi*D**2/4 # surface apparente du ballon en m^2
Cd=0.5 # coefficient de
beta=Cd*Snp*rhoair # coefficient de frottement quadratique

```

Hypothèses

- On suppose que la trajectoire est plane dans le plan (x,y)
 - On néglige la rotation du ballon et son extension spatiale (pas de possibilité de jouer avec la bande du filet, ou de l'écrasement du ballon sur la ligne)
 - Dans le cas de la prise en compte des frottements en considère une force

$$\vec{f} = -C_d S \rho v \vec{v}$$

(formule de Stokes) avec ρ la masse volumique de l'air S la surface apparente du ballon et C_d le coefficient de trainée.

1) Modélisation sans frottement

```

def equasolitaires(x,y):
    """X comprend les variables de positions x et y et les composantes du vecteurs vitesses vx et vy"""
    return np.array([X[2], X[3],0,-g])

```

```
alpha=0# valeur de l'angle du tir (tir horizontal si égal à 0)
N=5# nombre de valeurs de hauteur
v0=130/3.6# vitesse initiale du ballon en m/s
hmin=4# hauteur du filet
```

```

lmin=4# hauteur du filet
hmax=3.5# hauteur maximale raisonnablement atteinte par un volleyeur
h0=np.linspace(hmin,hmax,N)# variation de la valeur de h0 pour valider une valeur

```

```
X0=np.zeros((N,4))# génération de X0
X0[:,0]=x_S
X0[:,1]=h0
X0[:,2]=v0*np.cos(alpha1)
X0[:,3]=v0*np.sin(alpha1)
```

x0

```
Np=200  
tf=1.5# temps final de la modélisation  
t=np.linspace(0,tf,Np)
```

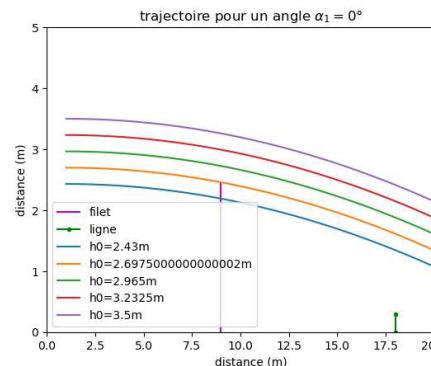
```
sol={}#dictionnaire vide des solutions  
for i in range(N):  
    sol[i]=odeint(equasansfrot,X0[i],t)
```

10. [] 11. [] 12. [] 13. [] 14. [] 15. []

```

plt.figure()
plt.plot([L1,L1],[0,H],'-m',label='filet')
plt.plot([L2,L2],[0,B],[ '-g',label='ligne')
for i in range(N):
    plt.plot(sol[i][:-1],sol[i][1:],label='h0=' +str(h0[i])+'m')
#plot axes
plt.xlabel('x (m)')
plt.ylabel('distance (m)')
plt.title('trajectoire pour un angle $\alpha_1=0^\circ$')
plt.ylim(0,5)
plt.xlim(0,10)
plt.grid(True)
plt.legend(loc=0)
plt.show()

```



On constate qu'en négligeant les frottements il n'est pas envisageable d'obtenir un service qui entre dans le terrain, même en tirant en diagonal d'un coin en visant le coin opposé. On pourrait essayer de tirer avec un angle négatif d'une hauteur maximale égale à 3,50 m

```

h0=3.5# hauteur maximale du tir
N=5# nombre de valeurs d'angles
v0=130/3.6# vitesse initiale du ballon en m/s
alphamin=0# hauteur du filet
alphamax=10# hauteur maximale raisonnablement atteinte par un volleyeur
alphadeg=np.linspace(alphamin,alphamax,N)
alpha=np.pi/180*N# variation de La valeur de v0 pour valider une valeur

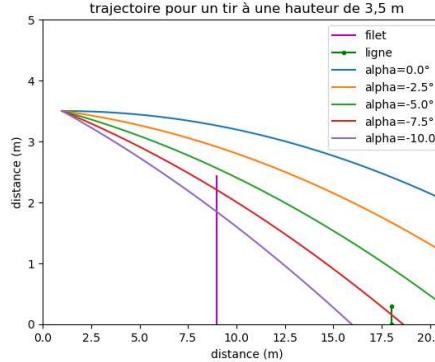
```

```
X0=np.zeros((N,4))# génération du vecteur conditions initiales x(0)=θ, y(0)=hθ, vx=θvcos(alpha),vy=θvsin(alpha)
X0[:,0]=x_S
X0[:,1]=hθ
X0[:,2]=θ*v*np.cos(alpha1)
X0[:,3]=θ*v*np.sin(alpha1)
```

```
rée[26]: X0a
tie[26]:
```

```
rée[28]: solas={}#dictionnaire vide des solutions pour des angles variables
for i in range(N):
    solas[i]=odeint(equasansfrot,X0a[i],t)
```

```
rée[30]: pit.figure()
pit.plot([l1,l1],[0,H],'-m',label='filet')
pit.plot([l2,l2],[0,0.3],'-g',label='ligne')
for i in range(N):
    pit.plot(solas[i][:,0],solas[i][:,1],label='alpha='+str(alphadeg[i])+'°')
#pit.axis('equal')
pit.xlabel('distance (m)')
pit.ylabel('distance (m)')
pit.title('trajectoire pour un tir à une hauteur de 3,5 m')
pit.ylim([0,5])
pit.xlim([0,ldiag+1])
pit.legend(loc=0)
pit.show()
```



Encore une fois le fait de négliger les frottements ne semble pas adapté et compatible aux vidéos des services de Wilfredo Leon, même si avec un angle voisin de -3°, un tir en diagonal, et une hauteur de lancé de 3,5m, il semble qu'il y ait une solution

2) Modélisation avec frottement

```
rée[34]: def equaavecfr(X,t):
    """x comprend les variables de positions x et y et les composantes du vecteurs vitesses vx et vy"""
    return np.array([X[2], X[3],-beta/m*X[2]*(X[2]**2+X[3]**2)**0.5,-g-beta/m*X[3]*(X[2]**2+X[3]**2)**0.5])
```

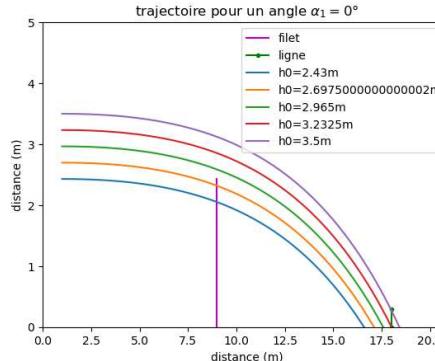
```
rée[36]: alpha1=0# valeur de L'angle du tir (tir horizontal si égal à 0)
N=5# nombre de valeurs de hauteur
v0=130/3.6# vitesse initiale du ballon en m/s
hmin=H# hauteur du filet
hmax=3.5# hauteur maximale raisonnablement atteinte par un volleyeur
h0=np.linspace(hmin,hmax,N)# variation de la valeur de h0 pour valider une valeur
```

```
rée[38]: X0frot=np.zeros((N,4))# génération du vecteur conditions initiales x(0)=0, y(0)=h0, vx=v0cos(alpha),vy=v0sin(alpha)
X0frot[:,0]=x_S
X0frot[:,1]=h0
X0frot[:,2]=v0*np.cos(alpha1)
X0frot[:,3]=v0*np.sin(alpha1)
```

```
rée[40]: Np=200
tf=1.5# temps final de la modélisation en seconde
t=np.linspace(0,tf,Np)
```

```
rée[42]: sol2={#dictionnaire vide des solutions
for i in range(N):
    sol2[i]=odeint(equaavecfr,X0frot[i],t)
```

```
rée[44]: pit.figure()
pit.plot([l1,l1],[0,H],'-m',label='filet')
pit.plot([l2,l2],[0,0.3],'-g',label='ligne')
for i in range(N):
    pit.plot(sol2[i][:,0],sol2[i][:,1],label='h0='+str(h0[i])+'m')
#pit.axis('equal')
pit.xlabel('distance (m)')
pit.ylabel('distance (m)')
pit.title('trajectoire pour un angle $\alpha_1=0$')
pit.ylim([0,5])
pit.xlim([0,ldiag+1])
pit.legend(loc=0)
pit.show()
```



On constate cette fois un fort impact de la force de frottement de l'air et dans cette simulation seul le service frappé à 2,96m franchit le filet.

```

rée[47]: h0=3.5# hauteur maximale du tir
N=6# nombre de valeurs d'angles
v0=130/3.6# vitesse initiale du ballon en m/s
alphamin=0# hauteur du filet
alphamax=5# hauteur maximale raisonnablement atteinte par un volleyeur
alphadeg=np.linspace(alphamin,alphamax,N)
alpha1=np.pi/180*np.linspace(alphamin,alphamax,N)# variation de la valeur de l'angle pour valider une valeur

rée[49]: X0frott=np.zeros((N,4))# génération du vecteur conditions initiales x(θ)=0, y(θ)=hθ, vx=vθcos(alpha),vy=vθsin(alpha)
X0frott[:,0]=x_S
X0frott[:,1]=h0
X0frott[:,2]=v0*np.cos(alpha1)
X0frott[:,3]=v0*np.sin(alpha1)

rée[51]: X0frott

rée[51]: tie[51]:
```

```

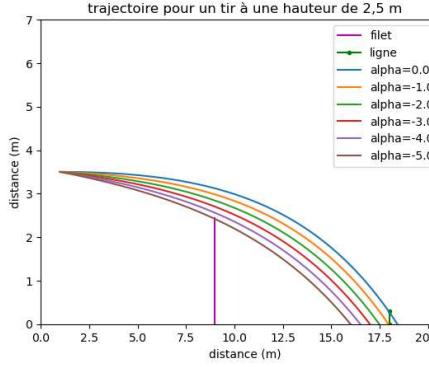
rée[53]: Np=300
tf=# temps final de la modélisation
t=np.linspace(0,tf,Np)
```

```

rée[55]: sol2frott={}#dictionnaire vide des solutions
for i in range(N):
    sol2frott[i]=odeint(equaavecrot,X0frott[i],t)
```

```

rée[57]: plt.figure()
plt.plot([l1,l1],[0,H],'-m',label='filet')
plt.plot([l2,l2],[0,0.3],'.g',label='ligne')
for i in range(N):
    plt.plot(sol2frott[i][:,0],sol2frott[i][:,1],label='alpha='+str(alphadeg[i])+'°')
plt.axis('equal')
plt.xlabel('distance (m)')
plt.ylabel('distance (m)')
plt.title('trajectoire pour un tir à une hauteur de 2,5 m')
plt.ylim([0,7])
plt.xlim([0,20])
plt.legend(loc=0)
plt.show()
```



Bilan

Les frottements ont une grande influence sur la trajectoire du ballon de volley lors d'un service :

- Avec la vitesse de 130km/h imposée par l'énoncé, il est compliqué de trouver des paramètres de lancé (x_s, h_0, α) compatibles à la réalisation de services réussis.
- Lorsqu'on considère les frottements, on retrouve des trajectoires habituelles dans des plages plus larges de paramètres de lancé.
- La trajectoire n'est pas plane si on prend en compte la rotation du ballon et les forces de frottements de l'air qui agissent sur la rotation du ballon. De plus, on peut avoir l'impression que le ballon "flotte". Tout ceci pourrait être étudié avec le cours de mécanique des fluides de seconde année, mais une première approche serait de considérer l'effet Magnus pour affiner notre modèle...