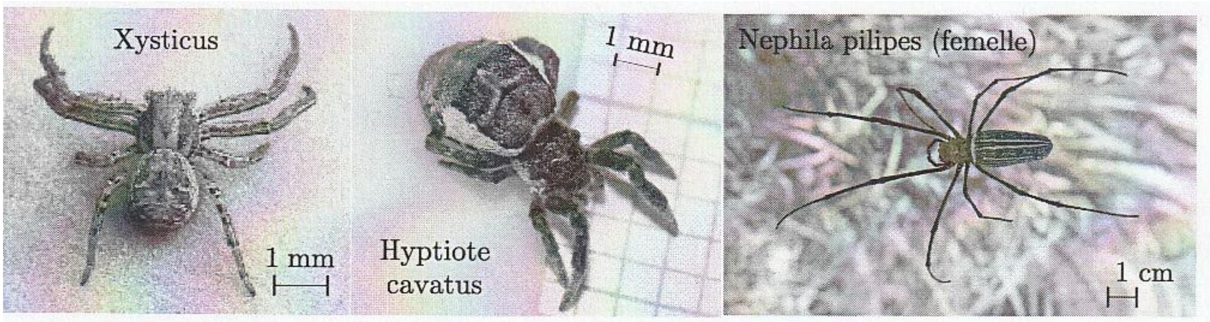
CLASSES DE PCSI 1 et 3 - D.L N° 6 DE PHYSIQUE

Problème n°1 : A propos des araignées…

Les araignées ou aranéides sont des prédateurs invertébrés arthropodes. A ce jour, plus de 47000 espèces subdivisées en 117 familles sont répertoriées et 1700 d'entre elles vivent en France. Les araignées produisent des fils de soie constitués d'un entrelacement de nombreuses fibrilles élémentaires. Le diamètre de ces fils varie typiquement de 1 jusqu'à 70 μm. A diamètre équivalent, ces fils sont plus résistants que l'acier et possèdent de nombreuses autres propriétés qui les rendent intéressants pour l'industrie, pour la confection par exemple de nouveaux textiles, de gilets pare-balles ou encore de cordes d'instruments de musique. L'objectif de ce problème est d'étudier les propriétés mécaniques des fils d'araignées…



A. Détermination expérimentale de la constante de raideur d'un fil de soie

L'élongation relative d'un fil de soie de longueur initiale l_0 de section S_0 soumis à une force de traction d'intensité F est donnée, dans le régime des faibles élongations, par la loi de Hooke :

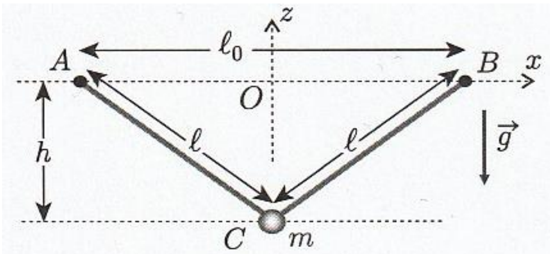
$$\frac{\delta l}{l_0} = \frac{1}{E}\frac{F}{S_0}$$

où E est le module de Young du matériau constituant le fil.

1) Quelle est la dimension de E ?

2) Dans ce régime de comportement mécanique, un fil de soie peut être assimilé à un ressort de constante de raideur k. Si on assimile δl à l'allongement du ressort, exprimer k en fonction de E, S_0 et de l_0.

Pour mesurer le module de Young d'un fil d'araignée, on procède à une expérience simple. Le fil de longueur l_0 est attaché en deux points fixes A et B distants de l_0 et situés sur une même horizontale (cf figure ci-contre).



Une masse m est suspendue au point C milieu du fil. Sous l'effet du poids de cette masse, le fil adopte à l'équilibre une forme en V dans laquelle les deux segments formant le fil ont la même longueur l.

On mesure alors la hauteur h dont le milieu du fil s'est déplacé par rapport à l'horizontale.

3) On considère un ressort, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On note $l(t)$ la longueur du ressort à un instant t donné. Donner l'expression de la force de rappel $\vec{F}$ (donnée par la loi de Hooke) exercée par un ressort sur un point matériel M en fonction de k, $l(t)$, l_0 et d'un vecteur unitaire à définir. Illustrer cette force sur un schéma.

4) Sur la figure présentée ci-dessus, nous admettrons que le fil de soie est équivalent à deux ressorts de longueur à vide $l_0/2$ et de constante de raideur $k' = 2.k$. Donner l'expression de la force $\vec{F}_1$ exercée par le premier ressort (situé à gauche de la masse m) sur la masse m, en fonction de k, l, l_0 et du vecteur

$\overrightarrow{AC}$. De la même manière, exprimer la force $\vec{F}_2$ exercée par le deuxième ressort sur la masse m, en fonction de k, l, l_0 et du vecteur $\overrightarrow{BC}$.
5) Montrer qu'à l'équilibre, le système vérifie la relation suivante :

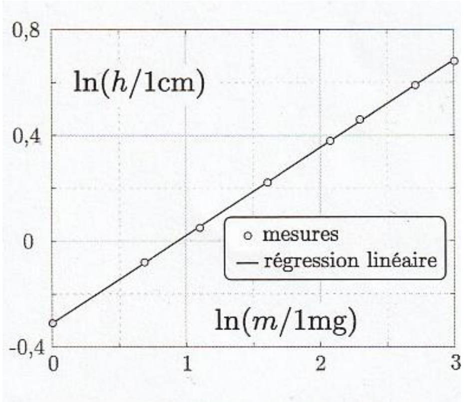
$$4.k.h.\left(1-\frac{l_0}{2.l}\right)=m.g$$

6) On rappelle que pour $\varepsilon \ll 1$, $\sqrt{1+\varepsilon}=1+\varepsilon/2$. En supposant que $h \ll \frac{l_0}{2}$ montrer que la relation précédente se ramène à :

$$\frac{8.k.h^3}{l_0^2}=m.g$$

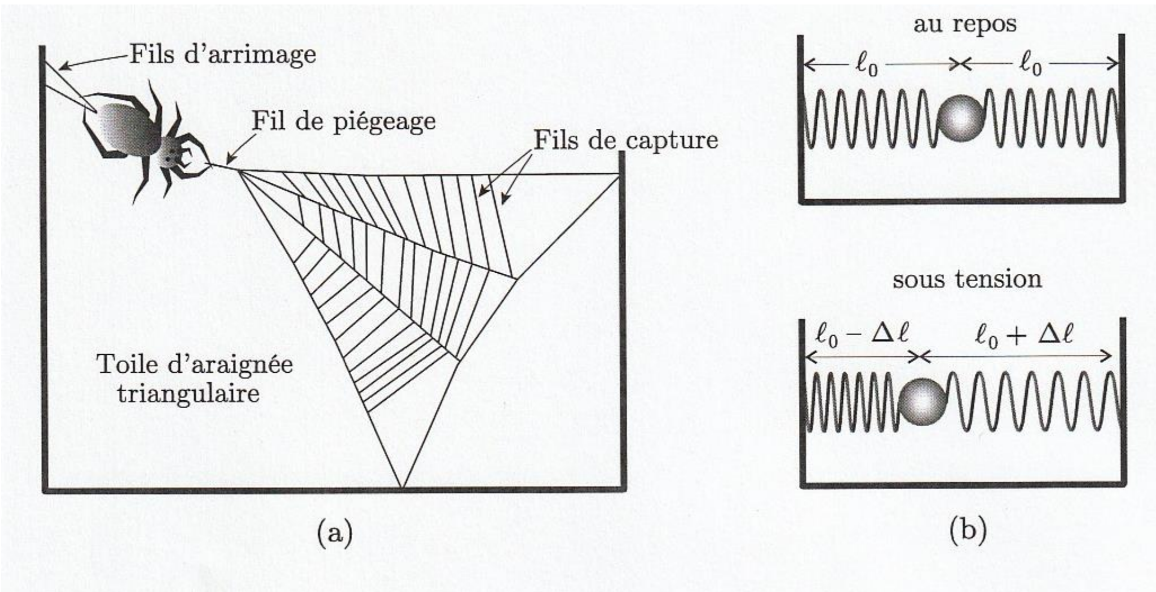
Cette relation constitue la loi de puissance (vérifiée lorsque la masse m est suffisamment faible) qui relie h à m et aux autres variables du problème.

La figure ci-contre reproduit les résultats de cette expérience réalisée avec un fil de longueur $l_0 = 5{,}0$ cm et de rayon $a = 5{,}0\ \mu m$ et différentes masses suspendues.
On donne $g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$.
7) Vérifier que cette loi est compatible avec l'expérience. Déterminer la constante de raideur k du ressort équivalent au fil. En déduire une estimation de la valeur numérique du module de Young du fil.



Mesures de $h(m)$.

B. Etude dynamique
L'araignée *Hyptiote cavatus*, qui possède une masse d'environ 7 mg, utilise ses muscles pour enrouler l'un des fils afin de tendre la toile, comme on utilise son bras pour tendre la corde d'un arc. Elle garde alors cette tension jusqu'à ce qu'une proie entre en contact avec la toile. Quand elle relâche la tension, la toile subit alors une très forte accélération puis s'emmêle autour de l'insecte proie, ce qui marque le début du processus de capture. La vitesse de l'araignée qui reste accrochée à la toile atteint alors une valeur maximale d'environ $v_{max} = 3\ \mathrm{m.s^{-1}}$ en ayant subi une accélération maximale prodigieuse $a_{max} = 8.10^2\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

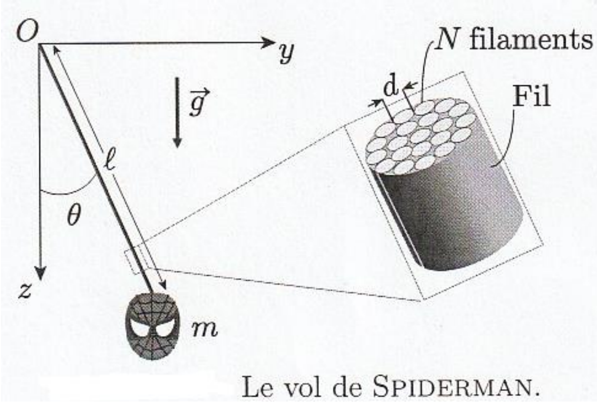


Organisation spatiale schématique de la toile triangulaire servant de piège – (b) Modèle mécanique équivalent au repos et sous tension

8) On modélise la toile par un simple fil de soie dont on néglige la masse devant celle de l'araignée. A partir de la modélisation proposée ci-dessus, montrer que ceci revient à supposer que l'araignée est soumise **à une seule force de rappel** de constante de raideur $2.k$. En supposant que l'araignée soit assimilable à un oscillateur harmonique, exprimer l'allongement maximum Δl_{max} du fil en fonction de v_{max} et a_{max}, ainsi que sa raideur k en fonction de m, v_{max} et a_{max}.

9) Par analyse dimensionnelle, exprimer la puissance mécanique instantanée maximale P_{max} développée pendant le processus de capture, en fonction de m, v_{max} et a_{max}. Sachant que la puissance massique musculaire maximale que peuvent fournir les arthropodes est d'environ $P = 326\ \mathrm{W.kg^{-1}}$ par kilogramme de muscle, estimer la masse de muscle nécessaire qu'il faudrait à notre araignée pour réaliser ce processus de capture sans aide extérieure. Conclure.

Dans les films, le super-héros SPIDERMAN, dont on estime la masse $m = 75\ kg$, poursuit les voitures en se balançant sur des fils d'immeuble en immeuble. Il attache son fil supposé inextensible, de masse négligeable et de longueur $l = 25\ m$ sur un point de l'immeuble situé en face, à l'horizontale par rapport à sa position. Dans ces conditions on a donc $\theta(0) = \pi/2$. Il se laisse alors entrainer sans vitesse initiale.



Le vol de SPIDERMAN.

10) Ecrire les équations du mouvement de SPIDERMAN. En déduire, en fonction de m et g, l'expression de la tension maximale que doit supporter ce fil si l'on suppose qu'il est inextensible.

On suppose que le fil que tisse SPIDERMAN est constitué en réalité de N filaments de soie identiques assemblés en parallèle.

11) Déterminer la constante de raideur du ressort équivalent à N ressorts identiques de constante de raideur k disposés en parallèles.

Sachant que le module de Young d'un filament de soie et son rayon valent respectivement $E = 10$ MPa et $a = 5{,}0\ \mu m$, combien de filaments le fil doit-il comporter au minimum pour que les filaments ne supportent pas une déformation supérieure à 1 % et donc pouvoir supporter SPIDERMAN lors de son vol ? Est-ce cohérent avec le diamètre des fils, de l'ordre du centimètre, produits par SPIDERMAN dans les films ?

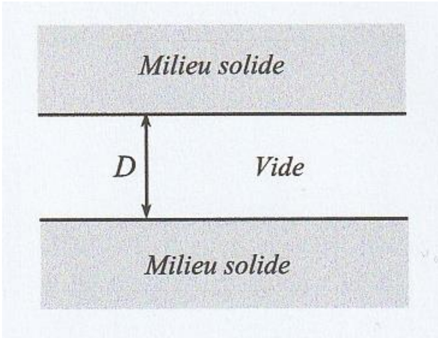
Problème 2: Le gecko…

Le gecko est un petit lézard capable de se déplacer à des vitesses de plusieurs mètres par seconde sur les murs ou les plafonds de pratiquement toutes natures, dans presque toutes les conditions. Des expériences menées en 2002 par l'équipe de l'américain Kellar Autumn ont montré que la spectaculaire faculté d'adhésion de l'animal est uniquement due à des forces de Van der Waals. L'adhésion est possible grâce à l'anatomie particulière des coussinets des doigts du lézard. Ces derniers sont recouverts de poils microscopiques, les sétules, ramifiés en des centaines de branches terminées par une spatule pouvant s'approcher à quelques nanomètres de la surface de contact.

Si on considère deux plans infinis parallèles, distants de D et séparant chacun un milieu solide (cf figure ci-dessous), on montre en prenant en compte l'ensemble des interactions de Van der Waals que **la force surfacique** entre les deux milieux s'écrit :

$$f(D) = \frac{A}{6.\pi.D^3}$$

La constante A, appelée constante de Hamaker, dépend de la nature des interactions de Van der Waals et des densités moléculaires des deux solides en interaction.



1) Une force surfacique est définie comme étant le rapport d'une force sur une surface. Vérifier que la constante de Hamaker A est homogène à une énergie.
2) Un gecko de masse $m = 50\ g$ est suspendu par ses quatre pattes au plafond. Le gecko possède au total 6,0 millions de sétules, comportant chacune en moyenne $5{,}0.10^2$ spatules. En modélisant une spatule par une surface carrée de côté $a = 0{,}20\ \mu m$ située à une distance $D = 1{,}0\ nm$ du plafond, estimer le pourcentage de sétules utilisés par le gecko pour soutenir sa masse. On prendra $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$ et $A = 1{,}0.10^{-19}\ J$.
Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a constaté qu'un gecko de $50\ g$ utilise à son maximum d'adhérence uniquement $0{,}04\ \%$ de ses sétules pour soutenir sa masse, peut-on bien imputer les facultés d'adhérence du gecko aux interaction de Van der Waals ? Pourquoi le gecko mobilise-t-il certainement davantage de sétules pour assurer son adhérence ?
3) A un instant pris pour origine, on suppose que le gecko lâche le plafond et chute (sans vitesse initiale) d'une hauteur $h = 10\ cm$ avant de se rattraper à l'aide d'une patte à une surface verticale. Sachant que l'équipe de Kellar Autumn a pu mesurer une force de cisaillement (opposé au glissement) de l'ordre de $F = 10\ N$ par patte, estimer la distance que doit parcourir le gecko lorsque sa patte est en contact avec le mur pour s'arrêter. On supposera qu'il mobilise $50\ \%$ de la capacité de cisaillement maximale de sa patte.