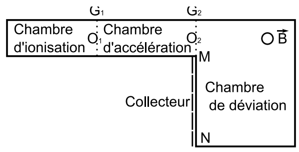
TD Mécanique n° 4

Mouvement de particules chargées

Capacités exigibles :
- Évaluer les ordres de grandeurs des forces électriques, magnétiques et gravitationnelles ◐.
- Savoir qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire ⌑.
- Effectuer un bilan énergétique pour calculer la vitesse d'une particule chargée accélérée ✠.

Exercice 1 Spectrographe de masse*** ⌑✠

Un spectrographe de masse est constitué de plusieurs parties comme l'indique la figure ci-dessous :

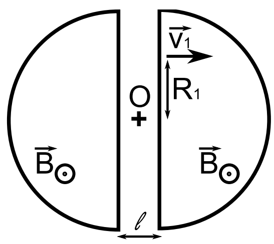


- La chambre d'ionisation dans laquelle des atomes de potassium ${}^{A1}_{19}K$ et ${}^{A2}_{19}K$ de masses respectives m_1 et m_2 portés à haute température sont ionisés en ions K^+. On considérera qu'à la sortie de cette chambre, en O_1, la vitesse des ions est quasi nulle.
- La chambre d'accélération dans laquelle les ions sont accélérés entre O_1 et O_2 sous l'action d'une différence de potentiel établie entre les deux grilles G_1 et G_2.
- La chambre de déviation dans laquelle les ions sont déviés par un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ de direction perpendiculaire au plan de la figure.
- Un collecteur d'ions constitué d'une plaque photosensible et disposé entre M et N

Les chambres sont sous vide. On négligera le poids des ions devant les autres forces et on admettra qu'à la sortie de la chambre d'accélération, les vecteurs vitesse des ions sont contenus dans le plan de la figure.

1. *Accélération des ions* Établir les expressions des vitesse v_1 et v_2 des ions lorsqu'ils parviennent en O_2 en fonction de m_1, m_2 et $U = V_{G_1} - V_{G_2}$.
2. *Déviations des ions*
   a) Quel doit être le sens du champ magnétique régnant dans la chambre de déviation pour que les ions puissent atteindre le collecteur ?
   b) Montrer que, dans la chambre de déviation, la trajectoire des ions est plane et que leur mouvement est uniforme.
   c) Montrer que la trajectoire de chaque type d'ion est un cercle, dont on donnera le rayon R_1 (respectivement R_2) en fonction de m_1 (respectivement m_2), e, U et B.
   d) En admettant que le rapport des masses des ions est égal au rapport de leurs nombres de masse, exprimer le rapport $\frac{A_1}{A_2}$ en fonction des rayons R_1 et R_2 des trajectoires.

Exercice 2 Cyclotron*** ◐⌑✠



Le cyclotron est un accélérateur de particules, constitué de deux demi-cylindres métalliques D et D', appelés « dees », d'axe vertical commun (Oz), placés dans le vide, et dans lesquels règne un champ magnétostatique uniforme et constant $\vec{B} = B\vec{u_z}$. Les deux demi-cylindres sont séparés d'une distance l, sur laquelle les particules sont accélérées grâce à une différence de potentiel sinusoïdale $u(t) = U_m \cos\omega t$. Une particule de masse m et de charge $q > 0$ est injectée dans le dispositif au voisinage de O, avec une vitesse $\vec{v_1} = v_1\vec{u_x}$ sur une trajectoire circulaire centrée en O et de rayon R_1. Le temps de passage d'un dee à l'autre est négligeable, et l'étude se fait dans le cadre de la mécanique newtonienne.

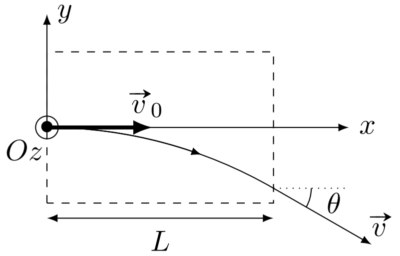
1. Exprimer, en fonction de q, m et B, la fréquence f qu'il convient de donner à la tension accélératrice pour que les particules chargées soient effectivement accélérées chaque fois qu'elles traversent l'espace entre les deux dees. Application numérique : $m = 1,67.10^{-27}\ kg$, $q = +e = 1,6.10^{-19}\ C$ et $B = 1,00\ T$.
2. Sachant que la trajectoire d'une particule est formée d'une suite de demi-cercles centrés au voisinage de O, de rayons successifs R_1, R_2, …, R_n reliés par des éléments de trajectoires rectilignes entre les dees, exprimer le rayon R_n en fonction de q, m, B, n, v_1 et U_m.
3. Des protons sont injectés sur une trajectoire de rayon $R_1 = 5,2.10^{-8}\ m$, dans un champ $B = 1,00\ T$, le diamètre utile du cyclotron étant $D = 0,625\ m$ et la tension accélératrice étant d'amplitude $U_m = 2.10^4\ V$, calculer :

a) la vitesse maximale atteinte par les protons sortant tangentiellement du cyclotron, ainsi que l'énergie cinétique acquise, exprimée en joules, puis en mégaélectronsvolts (MeV),
b) le nombre de tours effectués par les particules dans l'appareil,
c) le temps de transit dans l'appareil, Δt correspondant.

4. On suppose que l'injection se fait en continue au centre de l'accélérateur. On constate cependant que les protons arrivent à la sortie par paquets séparés les uns des autres par le même intervalle de temps. Expliquer l'origine de ces paquets et calculer l'intervalle de temps séparant deux paquets de protons.

Exercice 3 AGLAE, la Science au service de la Beauté ¤✠

L'Accélérateur Grand Louvre d'Analyse Élémentaire (AGLAE) est un accélérateur de particules implanté au musée du Louvre destiné à l'étude des œuvres d'art et d'archéologie. Lors d'une analyse, un faisceau de protons accélérés guidé avec précision percute un détail de la cible à étudier, sondant sa surface sans y pénétrer profondément. L'une des difficultés de l'analyse consiste à trier les particules issues du bombardement de protons. Nous étudions dans cet exercice un déflecteur magnétique dont le but est de dévier (et ainsi éliminer) les protons rétrodiffusés par la cible.



Le déflecteur magnétique compact de longueur $L = 50\,\text{mm}$ est constitué d'aimants permanents au néodyme ; il permet de défléchir des protons d'énergie cinétique $E_c = 3{,}0\,\text{MeV}$ grâce à un champ magnétique $B = 0{,}90\,\text{T}$. Ce champ est supposé uniforme dans la zone entourée de pointillés sur la figure ci-contre et nul ailleurs.

Le proton possède une masse $m = 1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg}$ et une charge $e = 1{,}60 \times 10^{-19}\,\text{C}$. On rappelle que $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$.

1. Calculer la vitesse v_0 des protons qui pénètrent en O dans le déflecteur.
2. Indiquer la direction et le sens du champ magnétique $\vec{B}$ permettant la déviation des protons présentée sur le schéma.
3. Montrer que la vitesse v du proton à la sortie du déflecteur est la même qu'en entrée.
4. La vitesse $\vec{v}_0$ étant orthogonale à $\vec{B}$, la trajectoire du proton dans le déflecteur est un arc de cercle de rayon R. Déterminer R en fonction de m, v_0, e et B. Calculer R.
5. Exprimer littéralement puis calculer l'angle de déflexion θ.

Exercice 4 Limites relativistes en microscopie électronique ◐

Un microscope électronique crée une image très agrandie d'un échantillon. Les grossissements peuvent aller jusqu'à 2 millions, soit environ 1000 fois plus que ce que l'on obtient avec un microscope optique. Néanmoins, la résolution spatiale intrinsèque est toujours plus grande que la la longueur d'onde du rayonnement utilisé. Un microscope électronique créé un faisceau d'électrons qu'il dirige vers un échantillon pour « l'éclairer ». La longueur d'onde qui limite la résolution est la longueur d'onde de de Broglie du faisceau électronique. Cette longueur d'onde est d'autant plus petite que les électrons sont rapides. Les électrons sont couramment accélérés jusqu'à des énergies cinétiques E_c comprises entre 10keV et 1MeV qui sont telles qu'on doit tenir compte d'effet relativistes. On doit alors introduire le facteur de Lorentz $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ où $\beta = \frac{v}{c}$ est le rapport entre la vitesse de l'électron v et la vitesse de la lumière c. Pour le calculer il faut savoir que dans le cadre de la théorie relativiste, l'expression de l'énergie cinétique est modifiée et devient : $E_c = (\gamma - 1)m_e c^2$ où $m_e c^2$ est l'énergie de masse de l'électron égale à 511 keV. De même, la longueur d'onde de Broglie est toujours définie à partir de la quantité de mouvement p : $\lambda = \frac{h}{p}$ mais la quantité de mouvement vaut $p = \gamma m_e v$. On a réunit dans le tableau ci-dessous les valeurs des paramètres suivants : la tension accélératrice U, le facteur de Lorentz γ, β et λ. Pour se rendre compte de l'importance de la correction relativiste, on donne également le rapport β_c obtenu dans l'approximation classique ainsi que la longueur d'onde de de Broglie associée λ_c.

U (kV)	γ	β	λ (pm)	β_c	λ_c (pm)
10	1,02	0,195	12,19	0,198	12,25
20	1,04	0,272	8,58	0,280	8,66
50	1,10	0,413	5,35	0,442	5,48
100	1,20	0,548	3,70	0,626	3,87
200	1,39	0,695	2,51	0,885	2,74
500	1,98	0,863	1,42	1,40	1,73
1000	2,96	0,941	0,87	1,98	0,122

1. En quoi les effets relativistes limitent la résolution intrinsèque de l'appareil ?
2. Exprimer les coefficients relativistes γ et β en fonction de la tension accélératrice U, de la charge de l'électron e, de sa masse m_e et de la vitesse de la lumière.
3. Vérifier à l'aide de la question précédente les longueurs d'onde apparaissant dans le tableau ci-dessus.

Solutions des exercices

[1] *Réponses : 1)* $v_i = \sqrt{\frac{2eU}{m_i}}$ *; 2c)* $R_i = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2Um_i}{e}}$ *; 2d)* $\frac{A_2}{A_1} = \frac{m_2}{m_1}$

[2] *Réponses : 1)* $f = 1,53.10^7\ Hz$ *; 2)* $R_n = \sqrt{R_1^2 + (n-1)\frac{2mU_m}{qB^2}}$ *; 3a)* $E_c = 4,7\ MeV$ *; 3b)* $N = 117$ *; 3c)* $\Delta t = 7,7.10^{-6}\ s$ *; 4)* $0,65\ ns$

[4] *Réponses* $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2eUm_e c^2(1+\frac{eU}{2m_e c^2})}}$