CLASSES DE PCSI 1 – Corrigé du D.L N° 6 DE PHYSIQUE

Problème 1: A propos des araignées…

A. Détermination expérimentale de la constante de raideur d'un fil de soie

1) En notant que $\delta l / l$ est sans dimension :

$$[E] = \left[\frac{F}{S}\right] = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{E = M.L^{-1}.T^{-2}}$$

Le module de Young est homogène au rapport d'une force sur une surface, il est homogène à une pression.

2) En identifiant δl à l'allongement du fil de soie :

$$F = \frac{E.S_0}{l_0}(\delta l) = \frac{E.S_0}{l_0}(l - l_0)$$

Le pré-facteur de cette expression est la constante de raideur du ressort (cf loi de Hooke) :

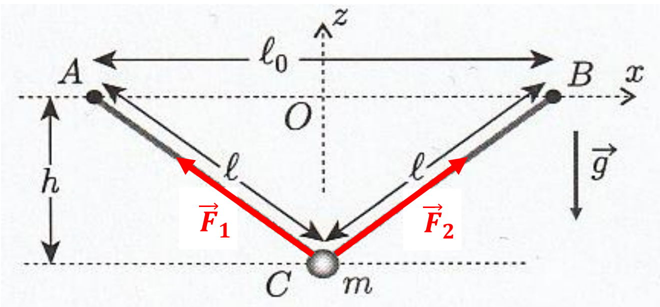
$$\boxed{k = \frac{E.S_0}{l_0}}$$

3) Pour de faibles allongements, la force de rappel exercée par un ressort est donnée par la loi de Hooke :

$$\boxed{\vec{T} = -k.(l(t) - l_0).\vec{u}_x}$$

avec $\vec{u}_x$ vecteur unitaire orienté du point de fixation du ressort vers le point M considéré (cf cours).

4) Représentons les forces $\vec{F}_1$ et $\vec{F}_2$ sur le schéma :



Par application de la loi de Hooke, on peut exprimer $\vec{F}_1$ sous la forme :

$$\vec{F}_1 = -k'.\left(l - \frac{l_0}{2}\right).\frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

Avec $k' = 2.k$ et $AC = l$:

$$\vec{F}_1 = -2.k.\left(1 - \frac{l_0}{2.l}\right).\overrightarrow{AC}$$

De la même manière, on établit que :

$$\vec{F}_2 = -2.k.\left(1 - \frac{l_0}{2.l}\right).\overrightarrow{BC}$$

Soit :

$$\boxed{\vec{F}_1 = -2.k.\left(1 - \frac{l_0}{2.l}\right).\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \vec{F}_2 = -2.k.\left(1 - \frac{l_0}{2.l}\right).\overrightarrow{BC}}$$

5) A l'équilibre, la somme des forces qui s'exerce sur la masse m est nulle :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{p} = \vec{0}$$

En projetant sur un vecteur $\vec{u}_z$ vertical ascendant, on établit que :

$$-2.k.\left(1 - \frac{l_0}{2.l}\right).(-h) - 2.k.\left(1 - \frac{l_0}{2.l}\right).(-h) - m.g = 0$$

On vérifie que :

$$\boxed{4.k.h.\left(1 - \frac{l_0}{2.l}\right) = m.g}$$

6) Explicitons la distance l :

$$l = \sqrt{(h)^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = \left((h)^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

En factorisant $l_0/2$:

$$l = \frac{l_0}{2}\left(1 + \left(\frac{2.h}{l_0}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Dans l'hypothèse que $h \ll \frac{l_0}{2}$ sachant que pour $\varepsilon \ll 1$, $\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon/2$, on établit que :

$$\frac{l_0}{2.l} = \left(1 + \left(\frac{2.h}{l_0}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{2.h^2}{l_0^2}$$

En explicitant dans la relation établie à la question 6) on établit que :

$$4.k.h.\left(\frac{2.h^2}{l_0^2}\right) = m.g$$

On vérifie que :

$$\boxed{\frac{8.k.h^3}{l_0^2} = m.g}$$

7) Exprimons h en fonction des données :

$$h = \left(\frac{m.g.l_0^2}{8.k}\right)^{\frac{1}{3}}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\ln(h) = \frac{1}{3}\ln(m) + \ln\left(\left(\frac{g.l_0^2}{8.k}\right)^{\frac{1}{3}}\right)}$$

Posons $x = \ln(m)$, $y = \ln(h)$, on reconnait une fonction affine du type :

$$y = a.x + b$$

Si on mesure la pente sur le document fourni (entre 0 et 3 sur l'axe des abscisses) :

$$a = \frac{0{,}7 - (-0{,}3)}{3 - 0} = \frac{1}{3} \text{ en accord avec le modèle}$$

A partir de la figure proposée, on peut noter que $\ln(m/1\,mg) = 0$ (c.à.d. pour $m = 1{,}0\,mg$) pour $\ln(h/\,1\,cm) = -0{,}30$ (c.à.d. pour $h = 7{,}4.10^{-3}m$). Sachant que :

$$\frac{8.k.h^3}{l_0^2} = m.g$$

On détermine la valeur de k :

$$k = \frac{m.g.l_0^2}{8.h^3} = 7{,}5\ N.m^{-1}$$

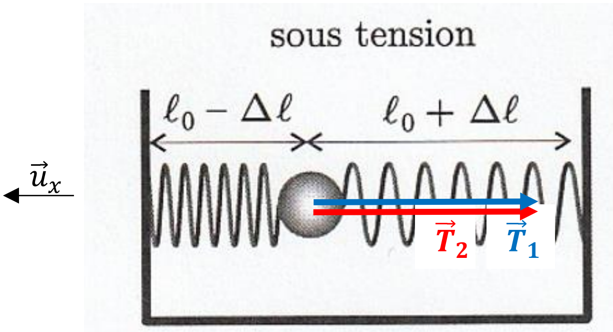
Sachant que le module de Young est donné par $k = \frac{E.S_0}{l_0}$:

$$E = \frac{k.l_0}{S_0} = 4{,}8.10^9\ \text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$$

Rq. : avec $[E] = M.L^{-1}.T^{-2}$ l'unité de E dans le S.I. est le $\text{kg.m}^{-1}.\text{s}^{-2}$

B. Etude dynamique

8) Représentons les forces de rappel $\vec{T}_1$ et $\vec{T}_2$ exercées sur l'araignée :



En explicitant les forces de rappel :

$$\vec{T}_1 = k.(l(t) - l_0).\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad l(t) = l_0 - \Delta l$$
$$\vec{T}_2 = -k.(l(t) - l_0).\vec{u}_x \quad \text{avec} \quad l(t) = l_0 + \Delta l$$

On note $\vec{T}_{rés}$ la force de rappel résultante :

$$\vec{T}_{rés} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = -2.k.\Delta l.\vec{u}_x$$

On vérifie que l'action des deux fils de soie est équivalente un fil unique de constante de raideur :

$$\boxed{k_{éq} = 2.k}$$

On assimile l'araignée à un oscillateur harmonique. Dans ce cas, sa position par rapport à sa position d'équilibre est donnée par :

$$\Delta l = \Delta l_{max}.\cos(\omega.t + \varphi)$$

avec $\omega = \sqrt{2.k/m}$ pulsation de l'oscillateur.

Sa vitesse et son accélération sont respectivement :

$$v(t) = -\Delta l_{max}.\omega.\sin(\omega.t + \varphi)$$
$$a(t) = -\Delta l_{max}.\omega^2.\cos(\omega.t + \varphi)$$

Par définition : $a_{max} = \Delta l_{max}.\omega^2$ et $v_{max} = \Delta l_{max}.\omega$. On en déduit que :

$$\boxed{\Delta l_{max} = \frac{v_{max}^2}{a_{max}}}$$

Exprimons désormais la raideur k en fonction de m, v_{max} et a_{max} :

$$\omega^2 = \frac{a_{max}}{\Delta l_{max}} = \left(\frac{a_{max}}{v_{max}}\right)\omega \quad \text{puis} \quad \omega = \sqrt{\frac{2.k}{m}} = \frac{a_{max}}{v_{max}}$$

Soit :

$$\boxed{k = \frac{m}{2}\left(\frac{a_{max}}{v_{max}}\right)^2}$$

A.N. : $\Delta l_{max} = 10^{-2}\ m = 1\ cm$ et $k = 3.10^2\ N.m^{-1}$

9) La puissance est homogène à une énergie par unité de temps :

$$[P_{max}] = \frac{[\text{énergie}]}{[\text{temps}]} = \frac{M.L^2.T^{-2}}{T} = M.L^2.T^{-3}$$

On vérifie que :

$$[m.v_{max}.a_{max}] = M.L^2.T^{-3}$$

Nous supposerons (l'analyse dimensionnelle ne permet pas de déterminer la présence d'un pré-facteur sans dimension) donc que :

$$\boxed{P_{max} = m.v_{max}.a_{max}}$$

Posons :

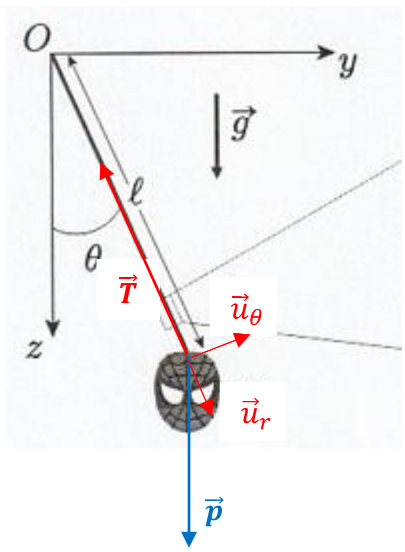
$$P_{max} = m_{mus}.P = m.v_{max}.a_{max}$$

avec m_{mus} masse de muscle de l'araignée.

$$\boxed{m_{mus} = \frac{m.v_{max}.a_{max}}{P}}$$

A.N. : $m_{mus} = 7.m$: impossible sans aide extérieure.

10) On assimile SPIDERMAN à un point matériel M de masse m observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Bilan des forces extérieures : le poids et la tension du fil (on néglige tous les phénomènes dissipatifs).



Appliquons le principe fondamental à M :

$$m.\vec{a}(M) = \vec{p} + \vec{T}$$

Projection dans la base de coordonnées polaires :

- Sur $\vec{u}_r$: $m.\left(-l.\dot{\theta}^2\right) = -T + m.g.\cos\theta$
- Sur $\vec{u}_\theta$: $m.l.\ddot{\theta} = -m.g.\sin\theta$

Pour déterminer $T(\theta)$, il faut expliciter $m.\left(-l.\dot{\theta}^2\right)$ en fonction de θ.

Pour cela, multiplions la relation obtenue par projection sur $\vec{u}_\theta$ par $\dot{\theta}$ puis primitivons par rapport au temps, en tenant compte des conditions initiales :

$$m.l.\dot{\theta}.\ddot{\theta} = -m.g.\dot{\theta}.\sin\theta$$

$$\frac{1}{2}m.l.\dot{\theta}^2 = m.g.\cos\theta + A$$

Sachant qu'à $\dot{\theta}(0) = 0$ pour $\theta = \pi/2$: $A = 0$. On en déduit que :

$$m.l.\dot{\theta}^2 = 2.m.g.\cos\theta$$

En explicitant cette égalité dans la relation obtenue sur $\vec{u}_r$ on établit que :

$$-2.m.g.\cos\theta = -T + mg.\cos\theta$$

Soit :

$$T(\theta) = 3.m.g.\cos\theta$$

On constate que la tension est maximale pour $\theta = 0$ (résultat prévisible) :

$$\boxed{T_{max} = 3.m.g}$$

Quand la tension est maximale, elle vaut 3 fois le poids de SPIDERMAN. A.N. : $T_{max} = 2{,}2.10^3\ N$

11) Quand on place N ressorts en parallèle, la constante de raideur équivalente est (cf TD et TP) :

$$\boxed{k_{éq} = N.k}$$

Posons :

$$k_{éq}.\Delta l = T_{max} = 3.m.g$$

Avec $\Delta l = 0{,}01.l$ et $k_{éq} = N.k$:

$$0{,}01.N.k.l = 3.m.g$$

Sachant que $k = E.S_0/l$ avec $S_0 = \pi.a^2$:

$$\boxed{N = \frac{3.m.g}{0{,}01.E.\pi.a^2}}$$

A.N. : $N = 2{,}8.10^8$ fils de soie.

On note D le diamètre du fil nécessaire pour soutenir SPIDERMAN, en négligeant les interstices entre les fils (cf schéma fourni dans l'énoncé) on peut noter que :

$$N.\pi.\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi.\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

On établit ainsi que :

$$\boxed{D = d.\sqrt{N}}$$

A.N. : $D = 17\ cm$: valeur très supérieure au diamètre des fils de SPIDERMAN qui sont de l'ordre du cm.

Problème 2: Le gecko…

1) Sachant que $f(D)$ est une force surfacique :

$$[f(D)] = \left[\frac{F}{S}\right] = \frac{M.L.T^{-2}}{L^2} = M.L^{-1}.T^{-2}$$

On en vérifie que A est homogène à une énergie :

$$\boxed{[A] = [f(D).D^3] = M.L^2.T^{-2}}$$

2) Posons $N_{sé} = 6{,}0.10^6$ le nombre de sétules, $N_{sp} = 5{,}0.10^2$ le nombre de spatules et N_{ut} le nombre de sétules utilisés. A l'équilibre, la somme des forces s'exerçant sur le gecko est nulle :

$$m.g - N_{ut}.(N_{sp}.a^2).\left(\frac{A}{6.\pi.D^3}\right) = 0$$

On en déduit que :

$$N_{ut} = \frac{m.g.6.\pi.D^3}{N_{sp}.a^2.A}$$

Le pourcentage de sétules utilisé est fixé par le rapport :

$$\boxed{\alpha = \frac{N_{ut}}{N_{sé}} = \frac{m.g.6.\pi.D^3}{N_{sé}.N_{sp}.a^2.A}}$$

A.N. : $\alpha = 0{,}077\ \%$

On peut noter que α est dans l'ordre de grandeur ce qui confirme l'hypothèse d'interactions de Van der Waals. Cependant, la valeur calculée est quasiment 2 fois supérieur à la valeur maximale calculée par l'équipe de Kellar Autumn… En milieu naturel, le gecko utilise davantage de sétules selon la régularité de la surface de contact (plus ou moins plane), et la présence éventuelle de poussière, de particules qui peuvent limiter l'adhérence.

3) On assimile le gecko à un point matériel observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Supposons que pendant sa chute, le gecko ne soit soumis qu'à son poids. Compte tenu du fait que le poids est une force conservative, l'énergie mécanique du gecko se conserve pendant la chute : $E_m =$ cte. Si on note v_0 la vitesse du gecko après une chute d'une hauteur h, on peut dire que :

$$\frac{1}{2}m.v_0^2 = m.g.h$$

On en déduit l'expression de la vitesse du gecko à son arrivée sur la surface verticale :

$$v_0 = \sqrt{2.g.h}$$

A partir du moment où le gecko glisse sur la surface verticale, il est soumis à l'action d'une force de frottement solide d'intensité $(F/2)$. Cette force est non-conservative. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique :

$$dE_m = \delta w^{nc} = -\left(\frac{F}{2}\right).dl$$

Entre la phase de réception et la phase d'arrêt, on établit que :

$$\Delta E_m = -\left(\frac{F}{2}\right).h'$$

en notant h' la distance de glissement sur la surface verticale.

Avec :

$$\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = 0 - \left(\frac{1}{2}m.v_0^2 + m.g.h'\right) = -m.g.(h + h')$$

Soit :

$$-m.g.(h + h') = -\left(\frac{F}{2}\right).h'$$

On en déduit que :

$$\boxed{h' = \frac{m.g.h}{\frac{F}{2} - m.g}}$$

A.N. : $h' = 1{,}1\ cm$