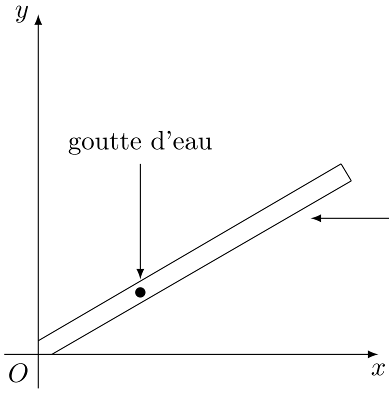
Problème 1 Histoires de gouttes et de bulles

A Arroseur rotatif

Dans cette partie, on étudie le mouvement d'une goutte d'eau, assimilée à un point matériel M, au sein d'un dispositif d'arrosage rotatif dans le référentiel terrestre. On utilise un paramétrage en coordonnées cylindriques.

Schéma d'un tube horizontal, vu de dessus :



Cet arroseur est constitué de trois pieds, d'un axe central vertical et de deux tubes droits horizontaux.

Chaque tube de longueur $L = 30\,\text{cm}$ tourne autour du point O dans un plan horizontal (Oxy) avec une vitesse angulaire constante $\omega = 3{,}0\,\text{tr}\,\text{s}^{-1}$.

L'axe Oz est vertical ascendant. L'axe Ox est confondu avec le tube à l'instant initial. À l'instant t, l'angle θ est l'angle formé entre cet axe Ox et la droite OM. Il croît au cours du mouvement. On note r la distance OM.

À l'instant initial, la goutte d'eau se trouve à l'entrée d'un tube, en O, et présente le vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_r}$, avec $v_0 > 0$. Le tube exerce sur la goutte une réaction normale $\overrightarrow{R_N} = R_\theta\overrightarrow{u_\theta} + R_z\overrightarrow{u_z}$. On néglige les frottements.

A.1 Reproduire le schéma d'un tube en y indiquant les vecteurs de la base polaire $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, ainsi que les coordonnées r et θ du point M.

A.2 Déterminer l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération en fonction de r, de ses dérivées temporelles et de la vitesse angulaire ω.

A.3 Établir l'équation du mouvement vérifiée par r.

A.4 Déterminer l'évolution temporelle $r(t)$ en fonction de t, ω et v_0. On cherchera des solutions sous la forme $r(t) = K_1\exp(\omega t) + K_2\exp(-\omega t)$.

A.5 Déterminer l'expression de $\overrightarrow{R_N}$ en fonction de t, ω, m, g, v_0 et des vecteurs unitaires de la base cylindrique.

A.6 Déterminer l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ de la goutte. à un instant t quelconque, en fonction de t, ω et v_0.

A.7

A.7.1 Déterminer l'expression de la vitesse initiale v_0 pour que la goutte ait effectué exactement N tours avant de sortir du tube ? Calculer v_0 pour $N = 1$.

A.7.2 À quelle vitesse $v_S = \|\overrightarrow{v_S}\|$, la goutte sort-elle du tube ? Faire l'application numérique pour $N = 1$.

A.7.3 Tracer l'allure de la trajectoire de la goutte pendant le tour parcouru (cas où $N = 1$). Y faire apparaître le vecteur vitesse de la goutte $\overrightarrow{v_S}$ à la sortie du tube et l'angle α entre la direction du tube et $\overrightarrow{v_S}$.

A.7.4 Déterminer l'expression de α. Calculer sa valeur dans le cas où $N = 1$.

B Bulles de champagne

On considère les bulles migrant vers la surface d'une flûte emplie de champagne. Les bulles sont essentiellement constituées de dioxyde de carbone CO_2. Celui-ci, initialement dissout dans le champagne quand la bouteille est fermée, repasse à l'état gazeux quand on ouvre la bouteille.

On étudie le mouvement d'une bulle de CO_2 sphérique de rayon r dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On considère un modèle d'ascension purement verticale de la bulle dans lequel, outre au poids, elle est soumise :

— à la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$;
— à une force de frottements fluides linéaire $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où α est donné par la formule de Stokes : $\alpha = 6\pi\eta r$ avec η la viscosité dynamique du champagne et r le rayon de la bulle.

Voici quelques données :
— rayon moyen d'une bulle : $r = 200\,\mu$m
— volume d'une sphère de rayon r : $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$,
— accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{ms^{-2}}$,
— masse volumique du champagne : $\rho_{ch} = 1{,}00\,\mathrm{kg\,L^{-1}}$
— masse volumique du dioxyde de carbone (à pression et température ambiantes) : $\rho_{\mathrm{CO_2}} = 1{,}87\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$
— viscosité dynamique du champagne : $\eta = 1{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$

B.1 En supposant que le dioxyde de carbone est à pression et température ambiantes, déterminer la masse moyenne m d'une bulle de champagne.

B.2 Comparer la norme du poids de la bulle et celle de la poussée d'Archimède subie. Conclure en faisant une hypothèse simplificatrice pour la suite du problème.

B.3 Expliquez qualitativement pourquoi la bulle de champagne va atteindre une vitesse limite v_{lim} au cours de son ascension.

B.4 Établir l'équation différentielle satisfaite par la norme $v(t)$ de la vitesse de la bulle.

B.5 En déduire les expressions de la constante de temps du problème notée τ et de la vitesse limite v_{lim} de la bulle. Calculer leurs valeurs numériques et commenter.

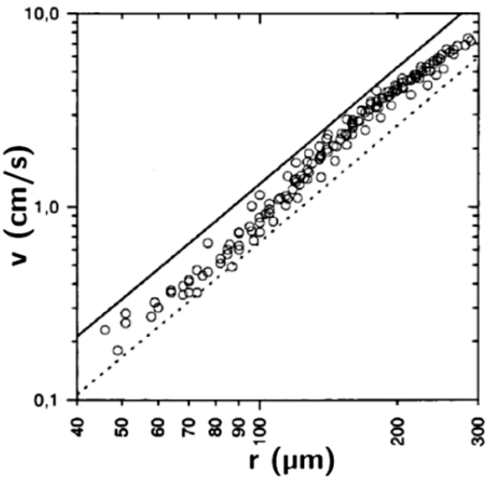
B.6 Résoudre l'équation différentielle vérifiée par $v(t)$. On veillera à faire apparaître τ.

B.7 Au bout de combien de temps, la bulle a-t-elle atteint sa vitesse limite, à 1% près ?

B.8 On s'intéresse à l'influence du rayon de la bulle sur la vitesse limite.

B.8.1 Donner l'équation reliant $\log(v_{lim})$ et $\log(r)$.

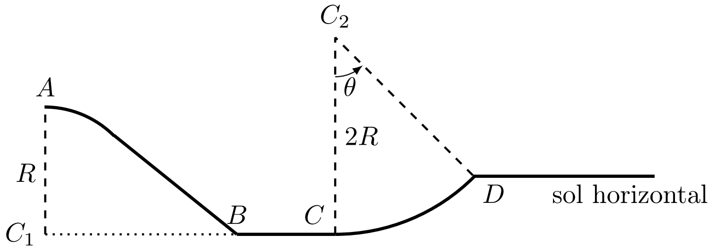
B.8.2 Des mesures de la vitesse limite en fonction du rayon d'une bulle conduisent aux résultats donnés sur le graphe ci-dessous. Les échelles utilisées sont logarithmiques. Montrer la cohérence de l'expression de v_{lim} avec les résultats expérimentaux.



Courbe expérimentale (Liger-Belair et al. (2000))

C Irrigation

On étudie cette fois une rigole hydraulique permettant l'irrigation d'un sol. La rigole suit l'évolution du sol et présente la forme ci-dessous :



BC : segment horizontal
CD : arc de cercle (C_2, $2R$)
avec $R = 30\,\mathrm{cm}$ et $\theta = 45\,^\circ$

On note C_1z l'axe vertical ascendant. On considère une goutte d'eau, assimilée à un point matériel M de masse $m = 30\,\mathrm{mg}$, qui part du point A avec une vitesse négligeable et qui évolue sans frottement le long de la rigole. L'accélération de la pesanteur est $||\vec{g}|| = g = 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

C.1 Donner l'expression des normes des vitesses de M en B, C et D. Calculer v_D.

À partir du point D, la goutte décolle de la rigole et retombe sur le sol horizontal en un point noté I.

C.2 Dans cette question, on néglige les frottements .

C.2.1 Faire un schéma de la rigole, y ajouter le vecteur vitesse de la goutte au point D.

C.2.2 Déterminer l'expression de la composante horizontale de la vitesse en D en fonction de g, R et θ.

C.2.3 Montrer que la composante horizontale de la vitesse reste constante dans la suite du mouvement.

C.2.4 Déterminer, par une approche énergétique, l'altitude maximale atteinte par la goutte, en prenant D comme nouvelle origine de l'axe des z.

C.3 En réalité, l'air exerce des frottements fluides de sorte que la vitesse de la goutte, une fois retombée au niveau du sol, a diminué de 10% par rapport à v_D. Déterminer l'expression du travail des forces de frottements fluides.

Problème 2 Confinement d'un électron

Ce problème porte sur l'étude sommaire du confinement d'un électron (de masse m et de charge $-e$) dans une petite région de l'espace à l'aide d'un champ électromagnétique. On se place dans le cadre de la mécanique newtonienne et on néglige toutes les forces autres que les forces électromagnétiques. L'électron se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$, supposé galiléen ; on appelle respectivement $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$ les vecteurs unitaires des axes (Ox), (Oy) et (Oz). On repérera un point M de l'espace par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z).

Données numériques :

— $q = -e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C la charge de l'électron,
— $c = 3{,}0 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ la vitesse de la lumière dans le vide,
— $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg la masse de l'électron.

Formulaire mathématique :
Au voisinage de 0, la fonction $(1 + x)^{\alpha}$ peut être approximée à $1 + \alpha x$.

A Mouvement de l'électron dans un champ magnétique uniforme

L'électron, se déplaçant dans le vide, est soumis à l'action d'un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent (indépendant du temps). Le champ magnétique $\vec{B}$ est colinéaire à (Oz) : $\vec{B} = B\overrightarrow{u_z}$ $(B > 0)$. On pose $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$. À l'instant initial, l'électron se trouve en O avec la vitesse $\vec{v_0} = v_{0x}\overrightarrow{u_x} + v_{0z}\overrightarrow{u_z}$ (v_{0x} et v_{0z} désignent des constantes positives).

A.1 Déterminer la coordonnée $z(t)$ de l'électron à l'instant t.

A.2 On étudie la projection du mouvement de l'électron dans le plan (Oxy).

A.2.1 Déterminer les composantes $v_x(t)$ et $v_y(t)$ de la vitesse de l'électron en fonction de v_{0x}, ω_c et de t.

A.2.2 En déduire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à l'instant t.

A.2.3 Montrer que la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan (Oxy) est un cercle Γ de centre H et de rayon r_H. Déterminer les coordonnées x_H et y_H de H, le rayon r_H et la fréquence de révolution f_c de l'électron sur ce cercle en fonction de v_{0x} et ω_c. Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan (Oxy). Préciser en particulier le sens de parcours de l'électron sur Γ.

A.3 Application numérique : calculer la fréquence f_c pour $B = 1{,}0$ T.

A.4 Tracer l'allure de la trajectoire de l'électron dans l'espace. L'électron est-il confiné au voisinage de O ?

B Mouvement de l'électron dans le champ électrique quadrupolaire

À l'aide d'électrodes de forme appropriée (cf figures 1 et 2), on crée autour du point O, dans une zone vide de charges, un champ électrostatique $\vec{E}$ quadrupolaire de révolution autour de l'axe (Oz) d'expression

$$\vec{E} = -\alpha(x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} - 2z\overrightarrow{u_z})$$

avec $\alpha = 1,2.10^{6}$ USI. On considère le mouvement de l'électron dans ce champ quadrupolaire uniquement.

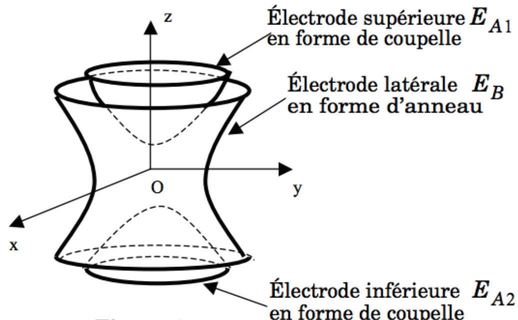


Figure 1

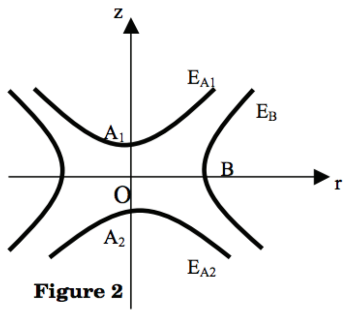


Figure 2

Coupe des électrodes dans le plan méridien

B.1 Exprimer l'unité de α en fonction des unités suivantes : volt (symbole : V) et mètre (symbole : m).

B.2 Écrire les trois équations différentielles du mouvement en projection sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz). On introduira la constante $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2\alpha e}{m}}$.

B.3 Montrer que le mouvement de l'électron suivant (Oz) (mouvement longitudinal) est périodique et déterminer sa fréquence f_0 en fonction de ω_0.

B.4 Application numérique : calculer f_0. Comparer les valeurs numériques de f_0 et de f_c.

B.5 Montrer que le mouvement de l'électron dans le plan (Oxy) (mouvement transversal) n'est pas borné. Il n'y a donc pas confinement de l'électron au voisinage de O dans le champ quadrupolaire.

C Mouvement de l'électron dans les champs magnétique et électrique

L'électron est maintenant soumis simultanément au champ magnétique $\vec{B}$ de la partie A et au champ électrique quadrupolaire $\vec{E}$ de la partie B.

C.1 Écrire les trois équations différentielles du mouvement en projection sur les axes (Ox), (Oy) et (Oz). On utilisera les constantes ω_c et ω_0.

C.2 Montrer que le mouvement longitudinal suivant l'axe (Oz), déterminé à la question B.3. n'est pas modifié.

C.3 Pour déterminer le mouvement transversal dans le plan (Oxy), on utilise la variable complexe $\underline{u} = x + iy$.

C.3.1 Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\underline{u}$.

C.3.2 Montrer que l'électron sera confiné autour de O si la pulsation ω_c est supérieure à une certaine valeur ω_{c0} que l'on exprimera en fonction de ω_0. En déduire la valeur minimale B_0 de B qui permet le confinement de l'électron. Exprimer B_0 en fonction de α, m et e.

C.4 **Résolution mathématique facultative (un peu technique) :** On suppose dorénavant $\omega_c \gg \omega_0$, ce qu'indiquaient les valeurs numériques précédentes.

C.4.1 Déterminer $\underline{u}$ en fonction de deux pulsations ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$), du temps t et de deux constantes d'intégration A_1 et A_2 qu'on ne cherchera pas à déterminer (la constante A_1 est associée à la pulsation ω_1 et la constante A_2 à la pulsation ω_2). Exprimer ω_1 et ω_2 en fonction de ω_0 et ω_c (compte tenu de $\omega_c \gg \omega_0$,).

C.4.2 Application numérique : calculer les fréquences f_1 et f_2 associées aux pulsations ω_1 et ω_2.

C.4.3 Montrer qu'à chaque pulsation ω_1 ou ω_2 est associé un mouvement circulaire de l'électron.

C.4.4 Le mouvement de l'électron apparaît donc comme la superposition de trois mouvements :
— un mouvement circulaire à la pulsation ω_1 dans le plan (Oxy) ;
— un second mouvement circulaire à la pulsation ω_2 dans le plan (Oxy) ;
— un mouvement sinusoïdal longitudinal à la pulsation ω_0 le long de l'axe (Oz).

Compte tenu des valeurs numériques des différentes pulsations et en supposant A_2 nettement plus petit que A_1, tracer l'allure de la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan (Oxy), puis l'allure générale de la trajectoire dans l'espace.

C.5 **Résolution numérique :**

C.5.1 Vectoriser le système d'équation de la question C.1 et définir une fonction `Phi(X,t)` en language python avec X le vecteur comprenant les inconnues `[x,y,z,vx,vy,vz]`.

C.5.2 Résoudre le système d'équation avec `odeint` de la librairie `scipy.integrate`.

C.5.3 Tracer avec `matplotlib`, les trajectoires dans les plans (O, x, y) et (O, x, z). Les représentations 3D sont aussi possibles...

Problème 3 Saut à la perche

Le saut à la perche est une épreuve d'athlétisme faisant partie des sauts. Elle consiste, après avoir effectué une course d'élan d'une cinquantaine de mètres, à s'aider d'une perche souple pour franchir sans la faire tomber une barre horizontale placée à plusieurs mètres de hauteur.

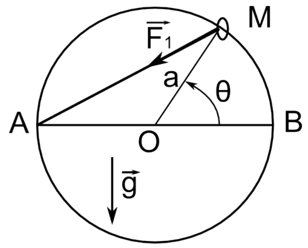
Le 15 septembre 2025 le record du monde de saut à la perche à été battu par Armand Duplantis. Il a franchi une barre à 6,30 m.

À l'aide d'une approche scientifique que vous détaillerez, estimer la vitesse atteinte par Armand Duplantis sur le sol avant qu'il ne s'élève grâce à sa perche. Commenter le résultat obtenu.

Développer la modélisation du problème (grandeurs pertinentes, hypothèses...), la stratégie de résolution et sa mise en œuvre ainsi que le regard critique que vous porté sur le résultat obtenu et sur la démarche suivie.

Problème 4 Oscillations autour de la position d'équilibre stable

Un anneau, assimilé à un point matériel de masse m, peut glisser sans frottement sur une circonférence de centre O placée dans un plan vertical fixe dans un référentiel supposé galiléen. Le rayon de cette circonférence est a et on repère la position de M par l'angle $\theta = (OB, OM)$. On admet que le point M est soumis en plus de son poids et de la réaction de l'anneau, à une force de rappel issue de l'extrémité A du diamètre AB : $\overrightarrow{F_1} = -k\overrightarrow{AM}$. Cette force est exercée par un ressort de raideur k et d'allongement nul quand M est en A (longueur à vide nulle).



1. Montrer que l'énergie potentielle s'écrit $E_p(\theta) = mga\sin\theta + ka^2(1+\cos\theta)$.
2. En déduire l'existence de deux positions d'équilibre $\theta_1 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $\theta_2 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$ et étudier la stabilité de ces positions d'équilibre.
3. À partir d'une méthode énergétique, établir l'équation différentielle du mouvement du point matériel M.
4. On considère de petites oscillations autour de la position d'équilibre stable. Calculer la période de ces oscillations. On posera $\theta(t) = \theta_{eq} + \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon \ll 1$. On admet alors que $\cos\varepsilon = 1$ et $\sin\varepsilon = \varepsilon$.