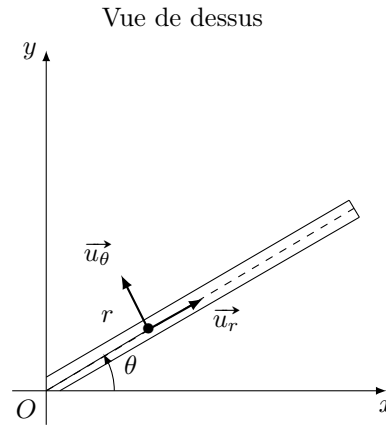


Problème 1 Histoires de gouttes et de bulles

A Arroseur rotatif

A.1 Schéma :



Le système est la goutte d'eau assimilée à un point matériel M de masse m , étudiée dans un référentiel terrestre local supposé galiléen.

A.2 Vecteur position $\boxed{\vec{OM} = r\vec{u}_r}$.

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$, $\boxed{\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\omega\vec{u}_\theta}$

Vecteur accélération : $\vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ car $\omega = cste$.

$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{u}_r + 2\dot{r}\omega\vec{u}_\theta}$

A.3 On applique la loi de la quantité de mouvement (LQM) à la goutte M . Elle est soumise :

- à son poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$
- à la réaction normale du support $\vec{R}_N = R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{u}_z$.

D'où

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}_N$$

$$m(\ddot{r} - r\omega^2)\vec{u}_r + 2\dot{r}\omega\vec{u}_\theta = -mg\vec{u}_z + R_\theta\vec{u}_\theta + R_z\vec{u}_z$$

On projette selon les trois vecteurs de la base :

- selon \vec{u}_r : $m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0$
- selon \vec{u}_θ : $2m\dot{r}\omega = R_\theta$
- selon \vec{u}_z : $-mg + R_z = 0$

Ainsi l'équation du mouvement vérifiée par r est

$$\boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du 2^{ème} ordre sans second membre.

A.4 On résout l'équation différentielle précédente. Le polynôme caractéristique associé à l'équation est $x^2 - \omega^2 = (x - \omega)(x + \omega)$.

Il admet deux racines $\pm\omega$. La solution s'écrit donc

$$r(t) = A \exp(\omega t) + B \exp(-\omega t)$$

On détermine les constantes d'intégration A et B grâce aux conditions initiales : $r(t=0) = 0$ et $v(t=0) = \dot{r}(t=0) = v_0$. Ainsi :

- $r(t=0) = 0$ donne $A = -B$
- $\dot{r}(t=0) = v_0$ donne $2\omega A = v_0$, $A = \frac{v_0}{2\omega}$

$$\boxed{r(t) = \frac{v_0}{2\omega} (\exp(\omega t) - \exp(-\omega t)) = \frac{v_0}{\omega} \sinh(\omega t)}$$

A.5 L'expression de la réaction normale \vec{R}_N est établie à partir des projections de la LQM suivant \vec{u}_θ et \vec{u}_z . $R_\theta = 2m\dot{r}\omega$ avec $\dot{r} = \frac{v_0}{2} (\exp(\omega t) + \exp(-\omega t)) = v_0 \cosh(\omega t)$ et $R_z = mg$.

$$\boxed{\vec{R}_N = 2m\omega v_0 \cosh(\omega t)\vec{u}_\theta + mg\vec{u}_z}$$

A.6 $\vec{v} = \dot{r}\vec{u}_r + r\omega\vec{u}_\theta,$

$$\vec{v} = v_0 \cosh(\omega t)\vec{u}_r + v_0 \sinh(\omega t)\vec{u}_\theta$$

A.7

A.7.1 À la sortie du tube, les coordonnées du point M , notées r_s et θ_s sont :

— $r_s = L$

— $\theta_s = \omega t_s = 2\pi N$

En reprenant l'expression de $r(t)$, il vient :

$$L = \frac{v_0}{\omega} \sinh(2\pi N)$$

$$v_0 = \frac{L\omega}{\sinh(2\pi N)}$$

A.N. : $v_0 = 2,1 \times 10^{-2} \text{ m s}^{-1}$

A.7.2 On calcule la norme de la vitesse à l'aide de l'expression établie précédemment :

$$||\vec{v}_S|| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = v_0 \sqrt{\cosh^2(\omega t) + \sinh^2(\omega t)}$$

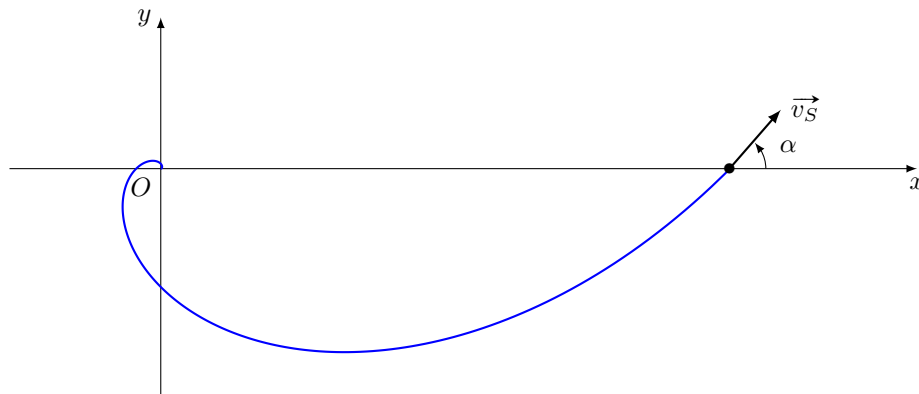
$$||\vec{v}_S|| = v_0 \sqrt{\cosh(2\omega t)}$$

À la sortie du tube, à l'instant t_S :

$$v_S = v_0 \sqrt{\cosh(4\pi N)}$$

A.N. : $v_S = 8,0 \text{ ms}^{-1}$

A.7.3 Allure de la trajectoire pour $N = 1$ tour et représentation du vecteur vitesse en sortie \vec{v}_S :



A.7.4 L'angle α existant entre \vec{v}_S et la direction du tube intervient dans un produit scalaire judicieusement

choisi : $\vec{u}_r \cdot \vec{v}_S = ||\vec{v}_S|| \cos \alpha$

Ainsi, $\cos \alpha = \frac{\vec{u}_r \cdot \vec{v}_S}{||\vec{v}_S||} = \frac{v_{rS}}{||\vec{v}_S||}$

or $v_{rS} = v_0 \cosh(2\pi N)$.

$$\cos(\alpha) = \frac{v_0 \cosh(2\pi N)}{v_0 \sqrt{\cosh(4\pi N)}}$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\cosh(2\pi N)}{\sqrt{\cosh(4\pi N)}} \right)$$

A.N. : $\alpha = 0,79 \text{ rad} = 45^\circ$

B Bulles de champagne

B.1 La masse de la bulle de champagne est $m = \rho_{\text{CO}_2} V = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{CO}_2} r^3$

AN : $m = 6,27 \times 10^{-11} \text{ kg}$

B.2 La norme du poids de la bulle est $||\vec{P}|| = mg$ avec m la masse calculée précédemment : $||\vec{P}|| = 6,14 \times 10^{-10} \text{ N}$, et celle de la poussée d'Archimède

$$||\vec{\Pi}|| = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{ch} g = 3,29 \times 10^{-7} \text{ N}.$$

A.N. : $\frac{||\vec{P}||}{||\vec{\Pi}||} = 0,0019$. Dans la suite, on néglige le poids dans le bilan des forces.

B.3 La poussée d'Archimède entraîne la bulle vers le haut du verre. La vitesse de la bulle augmente au début de l'ascension de sorte que la norme de la force de frottements augmente également, et ce jusqu'à ce que les deux forces se compensent. La bulle suit alors un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_{lim} .

B.4 Système étudié : bulle de CO_2
référentiel : terrestre local supposé galiléen

Bilan des forces : le poids \vec{P} (négligé), la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}$ et la force de frottements fluides \vec{f} .

On applique la loi de la quantité de mouvement (en négligeant le poids) :

$$m\vec{a} = \vec{\Pi} + \vec{f}$$

avec $m = \frac{4}{3}\pi\rho_{\text{CO}_2}r^3$

Projection selon l'axe vertical :

$$\frac{4}{3}\pi\rho_{\text{CO}_2}r^3\frac{dv}{dt} = \frac{4}{3}\pi r^3\rho_{ch}g - 6\pi\eta r v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r}{\frac{4}{3}\pi\rho_{\text{CO}_2}r^3}v = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_{ch}}{\frac{4}{3}\pi r^3\rho_{\text{CO}_2}}g$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_{\text{CO}_2}r^2}v = \frac{\rho_{ch}}{\rho_{\text{CO}_2}}g}$$

B.5 La forme canonique de l'équation différentielle est $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = \frac{1}{\tau}v_{lim}$, où τ est la constante de temps caractéristique du système.

$$\boxed{\tau = \frac{2\rho_{\text{CO}_2}r^2}{9\eta}}$$

A.N. : $\tau = 1,27 \times 10^{-5} \text{ s}$

Le temps caractéristique est très faible : le régime permanent où la bulle adopte un mouvement rectiligne uniforme à la vitesse v_{lim} sera atteint très rapidement.

La vitesse v_{lim} s'écrit :

$$\boxed{v_{lim} = \frac{2\rho_{ch}g}{9\eta}r^2}$$

A.N. : $v_{lim} = 6,71 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-1}$

B.6 Résolution de l'équation différentielle :

— solution particulière = solution en régime permanent $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$:

$$v_p = v_{lim} = \frac{2\rho_{ch}g}{9\eta}r^2$$

— solution de l'équation homogène : $v_h(t) = Ke^{-\frac{t}{\tau}}$

— solution générale : $v(t) = v_p + v_h(t)$

$$v(t) = v_{lim} + Ke^{-\frac{t}{\tau}}$$

On détermine K à l'aide de la condition initiale $v(t=0) = 0$: $K = -v_{lim}$.

Au final :

$$v(t) = v_{lim} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

B.7 On cherche l'instant t_{99} où la bulle a une vitesse $v(t_{99}) = 0,99v_{lim}$.

$$1 - e^{-t_{99}/\tau} = 0,99$$

$$\boxed{t_{99} = 2\tau \ln(10)} \simeq 5\tau$$

A.N. : $t_{99} = 5,84 \times 10^{-5} \text{ s}$. On retrouve bien le fait que le régime permanent est atteint très rapidement.

B.8 On s'intéresse à l'influence du rayon de la bulle sur la vitesse limite.

B.8.1 La vitesse en régime permanent est $v_{lim} = \frac{2\rho_{ch}g}{9\eta}r^2$ donc

$$\log(v_{lim}) = 2\log(r) + \log\left(\frac{2\rho_{ch}g}{9\eta}\right)$$

B.8.2 D'après la question précédente, on a effectivement une proportionnalité entre $\log(v_{lim})$ et $\log(r)$, ce qui est en accord avec la courbe obtenue expérimentalement.

On peut calculer la pente de la droite moyenne passant par les points expérimentaux : $A(r_A = 80 \times 10^{-6} \text{ m}, v_A = 6 \times 10^{-3} \text{ ms}^{-1})$ et $B(r_B = 200 \times 10^{-6} \text{ m}, v_B = 4 \times 10^{-2} \text{ ms}^{-1})$, on calcule

$$\frac{\log(v_B) - \log(v_A)}{\log(r_B) - \log(r_A)} \simeq 2,1$$

On retrouve bien le coefficient 2 qui apparaît dans le résultat théorique.

C Irrigation

C.1 Système étudié : goutte d'eau

référentiel : terrestre local supposé galiléen

Bilan des forces : le poids \vec{P} (force conservative qui dérive de $E_p = mgz + cte$), la réaction normale du support \vec{N} (force ne travaillant pas).

On utilise une méthode énergétique. On applique la loi de l'énergie cinétique entre les points A et B : $\Delta_{A \rightarrow B} E_c = E_c(B) - E_c(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) + W_{A \rightarrow B}(\vec{N})$ où

— $W_{A \rightarrow B}(\vec{P})$ est le travail du poids entre A et B ,

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \int_A^B -mg\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) = \int_A^B -mgdz$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = -mg(z(B) - z(A)) = mgR$$

— $W_{A \rightarrow B}(\vec{N})$ est le travail de la réaction normale entre A et B ,

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{N}) = 0$$

car \vec{N} est orthogonale au déplacement à chaque instant.

Ainsi, on obtient :

$$E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgR$$

Or, la vitesse en A est négligeable, $v_B = \sqrt{2gR}$

De la même manière, on applique la loi de l'énergie mécanique entre B et C :

$$E_c(C) - E_c(B) = -mg(z(C) - z(B)) = 0 \quad \text{car } z(B) = z(C).$$

Ainsi, $v_C = v_B$.

Et, enfin, on applique encore une fois la loi de l'énergie cinétique entre C et D :

$$E_c(D) - E_c(C) = -mg(z(D) - z(C))$$

Or, d'après le schéma de la rigole : $z(D) - z(C) = 2R(1 - \cos \theta)$

$$\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = -2mgR(1 - \cos \theta)$$

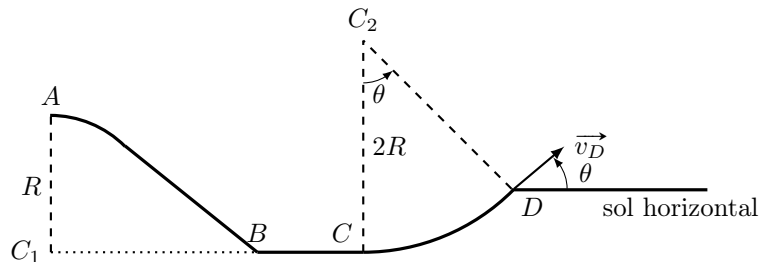
$$v_D^2 = -4gR(1 - \cos \theta) + 2gR$$

$$v_D = \sqrt{2gR(2 \cos \theta - 1)}$$

A.N. : $v_D = 1,6 \text{ ms}^{-1}$

C.2 Dans cette question, on néglige les frottements .

C.2.1 Vecteur vitesse au point D :



C.2.2 La composante horizontale de la vitesse est $v_{Dx} = \vec{v}_D \cdot \vec{u}_x$ avec $\vec{v}_D = v_D \vec{u}_\theta$,

$$v_{Dx} = v_D \cos \theta = \sqrt{2gR(2 \cos \theta - 1)} \cos \theta$$

C.2.3 À partir du point D , le système est uniquement soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$. Son accélération vérifie donc $\vec{a} = -\vec{g}$ et en projetant suivant \vec{u}_x , il vient $\ddot{x} = 0$, d'où $\dot{x} = cste = v_D \cos \theta$

C.2.4 Le système étant uniquement soumis à son poids, il est conservatif, son énergie mécanique reste constante tout au long du mouvement : $E_m(D) = E_m(S)$ avec S le sommet de la trajectoire. L'égalité $E_c(D) + E_p(D) = E_c(S) + E_p(S)$ s'écrit

$$\frac{1}{2}mv_D^2 + mgz_D = \frac{1}{2}mv_S^2 + mgz_S$$

L'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est prise en $z = 0$.

Au point S , la composante verticale de la vitesse est nulle. Par contre, il reste toujours la composante horizontale constante de sorte que $v_S = v_{Dx}$.

Il vient donc :

$$z_s = \frac{1}{2g}(v_D^2 - v_{Dx}^2)$$

C.3 En absence de force de frottement, on a : $E_m(D) = E_m(I)$ qui impose $v_D = v_I$.

En présence de force de frottement \vec{F} , la loi de l'énergie mécanique s'écrit : $\Delta E_m = E_m(I) - E_m(D) = W_{D \rightarrow I}(\vec{F})$.

Ainsi, $W_{D \rightarrow I}(\vec{F}) = \frac{1}{2}mv_I^2 - \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}m(\gamma v_D)^2 - \frac{1}{2}mv_D^2 = \frac{1}{2}mv_D^2(\gamma^2 - 1)$ avec $\gamma = 0,9$.

On obtient

$$W_{D \rightarrow I}(\vec{F}) = \frac{\gamma^2 - 1}{2}mv_D^2 = -9,5 \times 10^{-2}mv_D^2$$

A.N. : $W_{D \rightarrow I}(\vec{F}) = -6,9 \times 10^{-3} \text{ J}$

Problème 2 Confinement d'un électron

A Mouvement de l'électron dans un champ magnétique uniforme

A.1 Système : Électron de masse m et de charge $-e$.

Référentiel : \mathcal{R} supposé galiléen muni du repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan des forces : $\vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ et le poids \vec{P} qui est négligeable par rapport à \vec{F}_m .

D'après la loi de la quantité de mouvement : $m\vec{a} = \vec{F}_m = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ avec $\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z$ et $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$.

Donc

$$m\vec{a} = e\dot{x}B\vec{u}_y - e\dot{y}B\vec{u}_x$$

Par projection sur \vec{u}_z : $m\ddot{z} = 0$ donc $\dot{z} = \text{cste} = v_{0z}$ et $z = v_{0z}t + \text{cste}'$. Or $z(0) = 0$ donc $\text{cste}' = 0$.
Finalement

$$z(t) = v_{0z}t$$

A.2 On étudie la projection du mouvement de l'électron dans le plan (Oxy) .

A.2.1 Par projection sur (Ox) et (Oy) :

$$m\ddot{x} = -e\dot{y}B$$

$$m\ddot{y} = e\dot{x}B$$

soit

$$m\dot{v}_x = -ev_yB \quad (1)$$

$$m\dot{v}_y = ev_xB \quad (2)$$

La dérivation de (1) donne $m\ddot{v}_x = -e\dot{v}_yB$ qu'on combine avec (2) pour obtenir $\ddot{v}_x + \frac{e^2B^2}{m^2}v_x = 0$. On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique, dont la solution est de la forme $v_x(t) = A\cos(\omega_c t) + B\sin(\omega_c t)$ avec $\omega_c = \frac{eB}{m}$. Initialement $v_x(0) = v_{0x}$ et $\dot{v}_x(0) = -\omega_c v_y(0) = 0$ donc $A = v_{0x}$ et $B = 0$.
Finalement

$$v_x(t) = v_{0x}\cos(\omega_c t)$$

En réinjectant cette expression de v_x dans l'équation (2) nous obtenons : $\dot{v}_y = \omega_c v_{0x}\cos(\omega_c t)$. Par intégration on a $v_y = v_{0x}\sin(\omega_c t) + \text{cste}$. Or $v_y(0) = 0$ donc $\text{cste} = 0$ et

$$v_y(t) = v_{0x}\sin(\omega_c t)$$

A.2.2 On détermine les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à l'instant t en intégrant les équations précédentes :

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c}\sin(\omega_c t) + \text{cste}_1$$

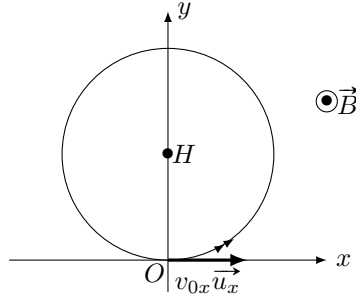
$$y(t) = -\frac{v_{0x}}{\omega_c}\cos(\omega_c t) + \text{cste}_2$$

Or $x(0) = y(0) = 0$ donc $\text{cste}_1 = 0$ et $\text{cste}_2 = \frac{v_{0x}}{\omega_c}$. Finalement

$$x(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c}\sin(\omega_c t) \quad \text{et} \quad y(t) = \frac{v_{0x}}{\omega_c}(1 - \cos(\omega_c t))$$

A.2.3 D'après ce qui précède $-\frac{v_{0x}}{\omega_c} \cos(\omega_c t) = y - \frac{v_{0x}}{\omega_c}$ et $\frac{v_{0x}}{\omega_c} \sin(\omega_c t) = x$ donc $\left(\frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2 (\cos(\omega_c t)^2 + \sin(\omega_c t)^2) = \left(\frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2 = \left(y - \frac{v_{0x}}{\omega_c}\right)^2 + x^2$. On reconnaît l'équation cartésienne d'un cercle de centre H de coordonnées (x_H, y_H) et de rayon $r_H : (x - x_H)^2 + (y - y_H)^2 = r_H^2$.
On en déduit $\boxed{x_H = 0}$, $\boxed{y_H = \frac{v_{0x}}{\omega_c}}$ et $\boxed{r_H = \frac{v_{0x}}{\omega_c}}$ avec $\omega_c > 0$.

Allure de la trajectoire :

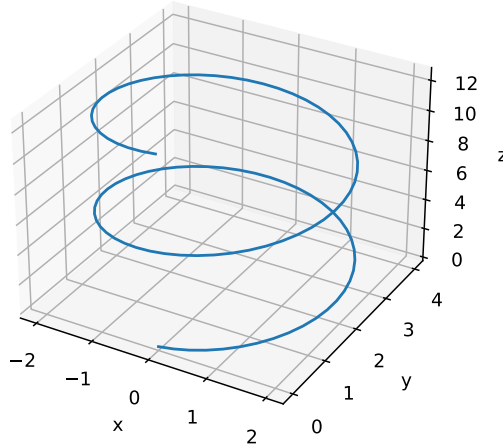


A.3 Le cercle est parcouru à la vitesse angulaire $\omega_c = \frac{eB}{m} = 2\pi f_c$. D'où la fréquence de révolution

$$\boxed{f_c = \frac{eB}{2\pi m}} \quad \text{A.N. : } \underline{f_c = 28 \text{ GHz}}$$

A.4 Le mouvement de l'électron résulte de la combinaison d'un mouvement circulaire uniforme autour de (Oz) et d'un mouvement de translation selon (Oz) d'où la trajectoire hélicoïdale suivante. L'électron n'est donc pas confiné en O .

Trajectoire de l'électron



B Mouvement de l'électron dans le champ électrique quadrupolaire

B.1 $[E] = [\alpha x] = [\alpha]L$ d'où $[\alpha] = [E]L^{-1}$ or E s'exprime en V m^{-1} donc α en V m^{-2} .

B.2 Système : Électron de masse m et de charge $-e$.

Référentiel : \mathcal{R} supposé galiléen muni du repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Bilan des forces : $\vec{F}_e = -e\vec{E}$ et le poids \vec{P} qui est négligeable par rapport à \vec{F}_e .

La 2^{ème} loi de Newton appliquée à l'électron donne : $m\vec{a} = -e\vec{E}$ d'où, en projetant sur les axes du repère

$$\text{cartésien : } \begin{cases} m\ddot{x} = +e\alpha x \\ m\ddot{y} = e\alpha y \\ m\ddot{z} = -2e\alpha z \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \ddot{x} - \frac{\omega_0^2}{2}x = 0 \\ \ddot{y} - \frac{\omega_0^2}{2}y = 0 \\ \ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases}$$

B.3 Selon l'axe (Oz) , l'électron vérifie l'équation d'un oscillateur harmonique, ainsi $z(t) = A \cos(\omega_0 t) +$

$B \sin(\omega_0 t)$. Le mouvement longitudinal est donc périodique de fréquence $\boxed{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\alpha e}{m}}}$

B.4 $f_0 = 1,0 \times 10^8 \text{ Hz} \simeq \frac{f_c}{2,7 \times 10^2} \ll f_c$.

B.5 Considérons $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$. Les racines de l'équation caractéristique sont $r = \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{2}}$ d'où $x(t) = A_1 e^{\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t} + A_2 e^{-\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t}$. Si $x(t=0) = 0$, alors $A_1 + A_2 = 0$ avec $A_1 \neq 0$ sinon il n'y a pas de mouvement. La fonction exponentielle $A_1 e^{\frac{\omega_0}{\sqrt{2}}t}$ traduit un mouvement non borné.

C Mouvement de l'électron dans les champs magnétique et électrique

C.1 Dans cette partie, les deux parties de la force de Lorentz sont à prendre en compte ce qui donne

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -e\dot{y}B + e\alpha x \\ m\ddot{y} = e\dot{x}B + e\alpha y \\ m\ddot{z} = -2e\alpha z \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \ddot{x} = \frac{\omega_0^2}{2}x - \omega_c\dot{y} \\ \ddot{y} = \frac{\omega_0^2}{2}y + \omega_c\dot{x} \\ \ddot{z} = -\omega_0^2 z \end{cases}$$

C.2 On retrouve la même équation différentielle selon l'axe (Oz) que précédemment (question B.3.) avec les mêmes conditions initiales ($z(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = v_{0z}$) ce qui donne $z(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ avec $A = 0$ et $B = \frac{v_{0z}}{\omega_0}$ soit

$$z(t) = \frac{v_{0z}}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

C.3 Pour déterminer le mouvement transversal dans le plan (Oxy), on utilise la variable complexe $\underline{u} = x + iy$.

C.3.1 On pose $\underline{u} = x + iy$, donc $\dot{\underline{u}} = \dot{x} + i\dot{y}$ et $\ddot{\underline{u}} = \ddot{x} + i\ddot{y}$.

$$\ddot{\underline{u}} = \frac{\omega_0^2}{2}x - \omega_c\dot{y} + i\left(\frac{\omega_0^2}{2}y + \omega_c\dot{x}\right)$$

$$\ddot{\underline{u}} = \frac{\omega_0}{2}\underline{u} + i\omega_c\dot{\underline{u}}$$

$$\ddot{\underline{u}} - i\omega_c\dot{\underline{u}} - \frac{\omega_0^2}{2}\underline{u} = 0$$

C.3.2 L'équation caractéristique est $r^2 - i\omega_c r - \frac{\omega_0^2}{2} = 0$ de discriminant $\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_0^2$. L'électron sera confiné si son mouvement est borné et donc si les solutions sont sinusoïdales (et non exponentielles)

d'où $\Delta = 2\omega_0^2 - \omega_c^2 < 0$ soit $\omega_c > \sqrt{2}\omega_0 = \omega_{c0}$. Cela donne $\frac{eB}{m} > \sqrt{2}\sqrt{\frac{2\alpha e}{m}}$ soit $B > 2\sqrt{\frac{\alpha m}{e}} = B_0$.

A.N. : $B_0 = 5,2 \text{ mT}$.

C.4 Résolution mathématique facultative (un peu technique) : On suppose dorénavant $\omega_c \gg \omega_0$, ce qu'indiquaient les valeurs numériques précédentes.

C.4.1 Les solutions de l'équation caractéristique sont $r_{\pm} = i\frac{\omega_c}{2} \pm i\frac{\sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}}{2}$ donc :

$$\begin{cases} r_- = i\omega_1 = i\frac{\omega_c}{2} \left(1 - \sqrt{1 - 2\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}\right) \\ r_+ = i\omega_2 = i\frac{\omega_c}{2} \left(1 + \sqrt{1 - 2\left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2}\right) \end{cases}$$

et $\underline{u} = A_1 \exp(i\omega_1 t) + A_2 \exp(i\omega_2 t)$

$$\text{Dans le cas où } \omega_c \gg \omega_0 : \begin{cases} \omega_1 \simeq \frac{\omega_c}{2} \left(1 - 1 + \frac{2}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2\right) = \frac{\omega_0^2}{2\omega_c} \\ \omega_2 \simeq \frac{\omega_c}{2} \left(1 + 1 - \frac{2}{2} \left(\frac{\omega_0}{\omega_c}\right)^2\right) = \left(\omega_c - \frac{\omega_0^2}{2\omega_c}\right) \end{cases}$$

$$\omega_1 \simeq \frac{\omega_0^2}{2\omega_c}$$

et

$$\omega_2 = \omega_c - \frac{\omega_0^2}{2\omega_c}$$

C.4.2 $f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 1,9 \times 10^5 \text{ Hz}$ et $f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 2,8 \times 10^{10} \text{ Hz}$.

C.4.3 On peut écrire la solution \underline{u} sous la forme

$$\underline{u} = A_1 \cos(\omega_1 t) + iA_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) + iA_2 \sin(\omega_2 t)$$

et obtenir $x(t)$ et $y(t)$ par identification :

$$\begin{cases} x(t) = \text{Re}(\underline{u}) = A_1 \cos(\omega_1 t) + A_2 \cos(\omega_2 t) \\ y(t) = \text{Im}(\underline{u}) = A_1 \sin(\omega_1 t) + A_2 \sin(\omega_2 t) \end{cases}$$

Si on considère uniquement la pulsation ω_1 , on a $x_1 = A_1 \cos(\omega_1 t)$ et $y_1 = A_1 \sin(\omega_1 t)$ ce qui donne

$$\left(\frac{x_1}{A_1}\right)^2 + \left(\frac{y_1}{A_1}\right)^2 = 1$$

On obtient l'équation d'un cercle de rayon $|A_1|$ décrit à la vitesse angulaire ω_1 .

De manière analogue, on a $x_2 = A_2 \cos(\omega_2 t)$ et $y_2 = A_2 \sin(\omega_2 t)$ et

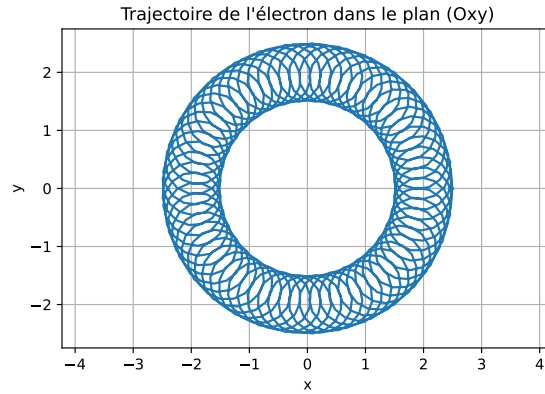
$$\left(\frac{x_2}{A_2}\right)^2 + \left(\frac{y_2}{A_2}\right)^2 = 1$$

soit un cercle de rayon $|A_2|$ décrit à la vitesse angulaire ω_2 .

C.4.4 Le mouvement de l'électron apparaît donc comme la superposition de trois mouvements :

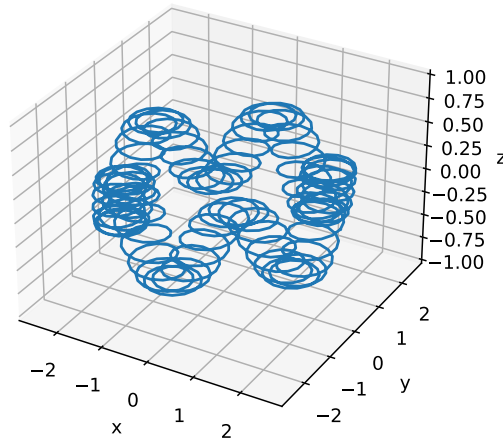
- un mouvement circulaire à la pulsation ω_1 dans le plan (Oxy) ;
- un second mouvement circulaire à la pulsation ω_2 dans le plan (Oxy) ;
- un mouvement sinusoïdal longitudinal à la pulsation ω_0 le long de l'axe (Oz) .

Le mouvement dans le plan (Oxy) est la combinaison d'un mouvement circulaire de grand rayon $|A_1|$ de période $T_1 = \frac{1}{f_1}$ grande et d'un mouvement circulaire de petit rayon $|A_2|$ et de petite période de révolution $T_2 = \frac{1}{f_2}$.



À ce mouvement dans le plan (Oxy) s'ajoute un mouvement sinusoïdal selon l'axe (Oz) de fréquence f_0 telle que $f_1 < f_0 < f_2$. Dans le cas où $\omega_0 = 5\omega_1$, $\omega_2 = 70\omega_1$, $A_2 = \frac{A_1}{4}$ et avec une amplitude de $z(t)$ égale à $\frac{A_1}{5}$, on obtient

Trajectoire de l'électron dans l'espace



C.5 Résolution numérique :

Partie C.5 : Résolution numérique

```
Entrée[1]: e=1.6e-19#charge de l'électron en coulomb
c=3.0e8#vitesse de la lumière dans le vide
m=9.1e-31#masse de l'électron en kg
alpha=1.2e6# coefficient pour le champ électrique
B=7e-3#7mT >5.2mT
omega0=(2*e*alpha/m)**0.5
omegac=e*B/m
omega1=omegac/2*(1-(1-2*(omega0/omegac)**2)**0.5)
omega2=omegac/2*(1+(1-2*(omega0/omegac)**2)**0.5)
v0z=1e2
z0=0
v0x=1e5
v0y=0
x0=0
y0=0
```

```
Entrée[2]: import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
```

C.5.1

```
Entrée[3]: def Phi(X,t):
    x,y,z,vx,vy,vz=X
    return np.array([vx,vy,vz,omega0**2/2*x-omegac*vy,omega0**2/2*y+omegac*vx,-omega0**2*z])
```

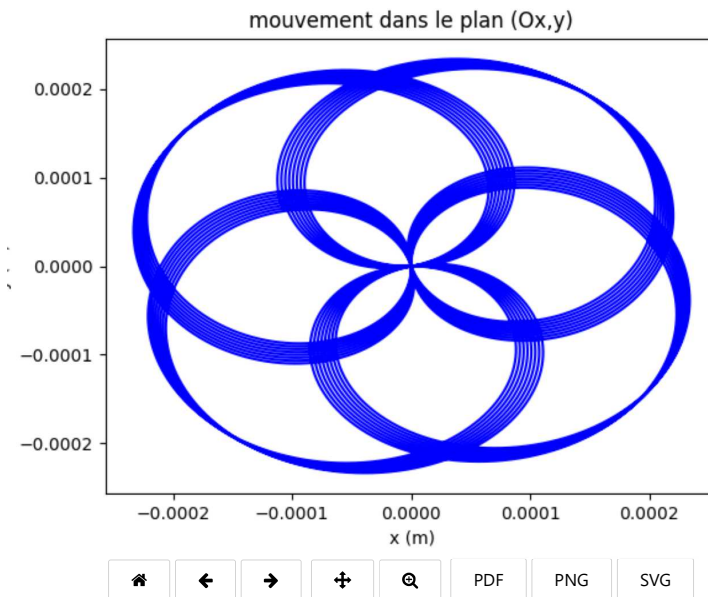
```
Entrée[4]: tf=8*2*np.pi/omega1
N=100000
X0=np.array([x0,y0,z0,v0x,v0y,v0z])
t=np.linspace(0,tf,N)
```

```
Entrée[5]: sol=odeint(Phi,X0,t)
```

```
Entrée[6]: x=sol[:,0]
y=sol[:,1]
z=sol[:,2]
```

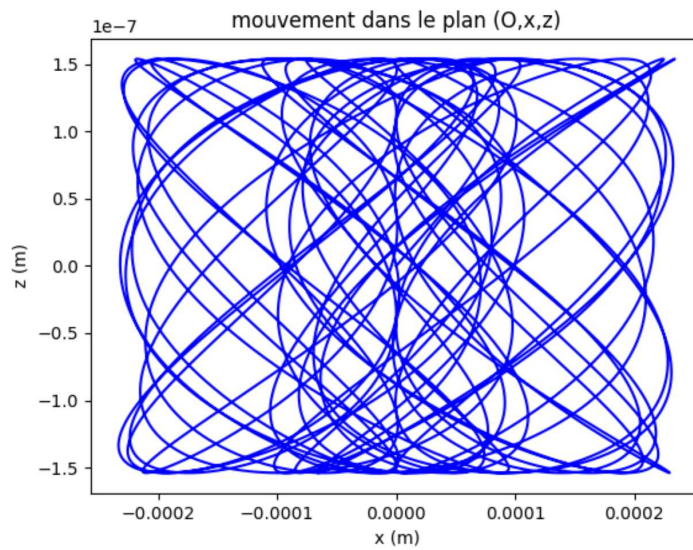
```
Entrée[7]: plt.figure()
plt.plot(x,y,'b-')
plt.title('mouvement dans le plan (Ox,y)')
plt.xlabel('x (m)')
plt.ylabel('y (m)')
plt.show()
```

Figure 1



```
Entrée[8]: plt.figure()
plt.plot(x,z,'b-')
plt.title('mouvement dans le plan (0,x,z)')
plt.xlabel('x (m)')
plt.ylabel('z (m)')
plt.show()
```

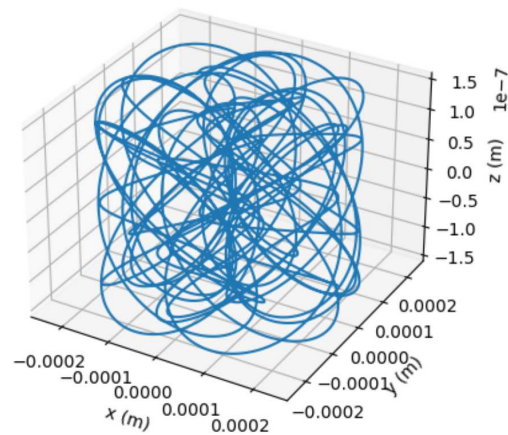
Figure 2



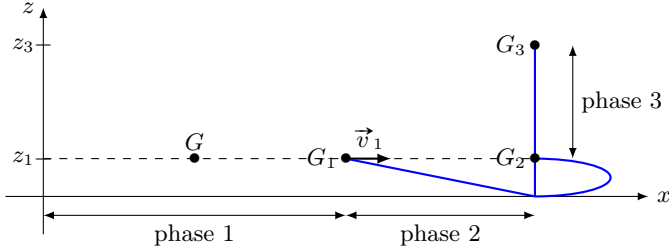
```
Entrée[13]: plt.figure("trajectoire 3D")
axes = plt.axes(projection="3d")
print(axes, type(axes))
axes.plot(x, y, z)
axes.set_xlabel("x (m)")
axes.set_ylabel("y (m)")
axes.set_zlabel("z (m)")
plt.show()
```

Axes3DSubplot(0.125,0.11;0.775x0.77) <class 'matplotlib.axes._subplots.Axes3DSubplot'>

trajectoire 3D



Problème 3 Saut à la perche

| Compétence | Exemples de résolution |
|--|--|
| S'approprier le problème | <p>Le principe du saut à la perche repose sur la conversion d'énergie cinétique en énergie potentielle via l'intermédiaire d'une perche que l'on peut assimiler à un ressort qui sera comprimé grâce à l'énergie cinétique du perchiste puis qui restituera cette énergie potentielle élastique sous forme d'énergie potentielle de pesanteur.</p> <p>On assimile le perchiste à un solide indéformable de masse m (hypothèse simplificatrice car il est en mouvement) de centre de gravité G. On modélise le mouvement du perchiste en le décomposant en quatre phases :</p> <ul style="list-style-type: none"> Le perchiste court horizontalement et atteint la vitesse v_1. L'altitude de G est constante et notée $z_G = z_1$ avec un axe (Oz) ascendant. Le perchiste comprime sa perche assimilée à un ressort et convertit son énergie cinétique en énergie potentielle élastique. On suppose que sur cette phase z_G reste constant ($z_G = z_1$). La perche restitue son énergie potentielle élastique selon une direction verticale ce qui a pour effet d'augmenter l'altitude du perchiste jusqu'à l'altitude z_3. Le perchiste retombe en chute libre sur le tapis présent sur le sol.  <p>On suppose qu'on néglige les frottements de l'air et que la perche restitue toute l'énergie cinétique de la première phase en énergie potentielle de pesanteur.</p> <p>L'objectif de cet exercice est de déterminer la vitesse v_1 du perchiste connaissant l'altitude maximale de son centre de gravité z_2 (assimilée à la hauteur de la barre).</p> |
| Établir une stratégie de résolution (analyser). | <p>On considère le système {perchiste} dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on utilise une approche énergétique. À la fin de la première phase l'énergie cinétique du perchiste s'écrit $E_c = \frac{1}{2}mv_1^2$. En supposant que le perchiste n'est soumis qu'à des forces conservatives (poids, tension de la perche, frottements négligés), l'énergie mécanique du perchiste se conserve. Soit entre la fin de la phase 1 et la fin de la phase 3 : $\Delta_{1 \rightarrow 3} E_c + \Delta_{1 \rightarrow 3} E_{pe} + \Delta_{1 \rightarrow 3} E_{pp}$ avec $\Delta_{1 \rightarrow 3} E_c = -\frac{1}{2}v_0^2$ (la composante suivant z de la vitesse du perchiste est nulle lorsqu'il atteint son altitude maximale), $\Delta_{1 \rightarrow 3} E_{pp} = 0$ (à la fin de la phase 3 la perche est « libre ») et $\Delta_{1 \rightarrow 3} E_{pe} = mg(z_3 - z_1)$, soit $\frac{1}{2}mv_1^2 = mg(z_3 - z_1)$ et $v_1 = \sqrt{2g(z_3 - z_1)}$.</p> |
| Mettre en œuvre la stratégie | <p>On considère que l'altitude du centre de gravité du perchiste lorsqu'il touche le sol est égale à $z_1 = 1,0$ m. L'altitude du centre de gravité du perchiste et la hauteur de la barre est très proche soit $z_3 = 6,30$ m et on prend $g = 9,81$ m s⁻².</p> <p>L'application numérique donne $v_1 = 10$ m s⁻¹.</p> |
| Avoir un regard critique sur les résultats obtenus (valider) | <p>La valeur obtenue semble cohérente pour un athlète de haut niveau : un coureur de 100 m qui le réalise en 10 s a une vitesse moyenne de l'ordre de 10 m/s, donc sa vitesse instantanée peut être supérieure (le départ est arrêté). Cela veut aussi dire qu'il semble difficile d'augmenter significativement ce record du monde. Les frottements lors de l'ascension du perchiste ne sont certainement pas négligeable, mais nous n'avons pas pris en compte les forces intérieures du perchiste qui augmente son énergie mécanique (impulsion verticale du pied d'appel et forces des bras exercées sur la perche à la fin de la phase 1 et impulsion verticale des bras lorsque le perchiste quitte la perche à la fin de la phase 3). On peut supposer que ces forces intérieures compensent la perte d'énergie mécanique par frottement fluide ou au sein de la perche.</p> |
| Communiquer | |

Problème 4 Oscillations autour de la position d'équilibre stable

- L'énergie potentielle du point matériel M est la somme de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique. L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit : $E_{p1} = mga \sin \theta$ on prend $E_{p1} = 0$ pour $\theta = 0$ et l'énergie potentielle élastique est de la forme $E_{p2} = \frac{1}{2}kAM^2$ puisque la longueur à vide du ressort est nulle. $AM^2 = a^2(1+\cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta = 2a^2(1+\cos \theta)$. On a alors $E_p(\theta) = E_{p1} + E_{p2} = mga \sin \theta + ka^2(1 + \cos \theta)$.
- Une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle. On dérive alors l'énergie potentielle par rapport à θ . $\frac{dE_p}{d\theta} = mga \cos \theta - ka^2 \sin \theta$. Cette dérivée s'annule si $mga \cos \theta = ka^2 \sin \theta$ soit $\tan \theta = \frac{mg}{ka}$. Le rapport $\frac{mg}{ka}$ est positif, On a donc deux possibilités $\theta_1 = \arctan \frac{mg}{ka}$ et $\theta_2 = \pi + \arctan \frac{mg}{ka}$.
La stabilité de ces positions d'équilibre s'étudie en regardant le signe de la dérivée seconde : $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} =$

$-mga \sin \theta - ka^2 \cos \theta$. soit $\frac{d^2 E_p}{d\theta^2}(\theta = \theta_{eq}) = -\cos \theta_{eq}(ka^2 + mga \tan \theta_{eq})$. Cette dérivée seconde n'est positive que si $\cos \theta_{eq} < 0$ soit $\theta_{eq} \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$. θ_2 est donc une position d'équilibre stable et θ_1 est une position d'équilibre instable.

3. L'évolution est conservative puisque le poids et \vec{F}_1 dérive d'une énergie potentielle et que la puissance de la réaction du support est nulle ($\vec{R} \perp \vec{v}$). L'énergie mécanique est donc constante et est égale à : $E_m = \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 + mga \sin \theta + ka^2(1 + \cos \theta)$, $\frac{dE_m}{dt} = ma^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \cos \theta - \frac{k}{m} \sin \theta) = 0$ L'équation différentielle du mouvement s'écrit alors : $\ddot{\theta} + \frac{g}{a} \cos \theta - \frac{k}{m} \sin \theta = 0$

4. On considère de petites oscillations autour de la position d'équilibre θ_2 . On pose $\theta(t) = \theta_2 + \varepsilon(t)$ avec $\varepsilon \ll 1$. L'équation différentielle du mouvement devient $\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{a} \cos(\theta_2 + \varepsilon) - \frac{k}{m} \sin(\theta_2 + \varepsilon) = 0$ et $\cos(\theta_2 + \varepsilon) = \cos \theta_2 - \varepsilon \sin \theta_2$ et $\sin(\theta_2 + \varepsilon) = \sin \theta_2 + \varepsilon \cos \theta_2$. On obtient alors $\ddot{\varepsilon} - \varepsilon(\frac{g}{a} \sin \theta_2 + \frac{k}{m} \cos \theta_2) + \frac{g}{a} \cos \theta_2 - \frac{k}{m} \sin \theta_2$. Les deux derniers termes s'annulent pour θ_2 et on obtient l'équation suivante : $\ddot{\varepsilon} - \frac{k}{m} \cos \theta_2(1 + \frac{mg}{ka})\varepsilon = 0$. De plus $\cos \theta_2 = \frac{-1}{\sqrt{1+\tan^2 \theta_2}} = \frac{-1}{\sqrt{1+(\frac{mg}{ka})^2}}$ car $\cos \theta_2 < 0$. L'équation différentielle devient : $\ddot{\varepsilon} + \frac{k}{m} \sqrt{1 + (\frac{mg}{ka})^2} \varepsilon = 0$. On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega^2 = \frac{k}{m} \sqrt{1 + (\frac{mg}{ka})^2}$ et de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.