

Devoir surveillé n° 5

Électricité

- La durée de l'épreuve est de 3 heures. Les étudiants ne sont pas autorisés à sortir avant la fin du temps prévu.
- L'usage de la calculatrice est autorisé.
- Les numéros de questions et les résultats doivent ressortir de votre copie (pas de rédaction monochrome).
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité sera considérée comme fausse.
- Les résultats littéraux non homogènes entraîneront la perte de tous les points de la question.
- Si au cours de l'épreuve vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, vous le signalerez sur votre copie et poursuivrez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.

Problème 1 Utilisation d'une batterie

On s'intéresse dans ce problème à l'utilisation d'une batterie au cours de sa décharge et de sa recharge. Nous commencerons dans la partie A par une étude de l'alimentation stabilisée utilisée pour la recharge de la batterie. Dans la partie B, nous modéliserons la batterie avant de l'utiliser pour faire fonctionner un petit moteur. Pour finir, dans la partie C, nous étudierons la recharge de cette batterie à l'aide de l'alimentation stabilisée.

A L'alimentation stabilisée

L'alimentation stabilisée étudiée ici est un dipôle dont la caractéristique en convention générateur est la suivante :

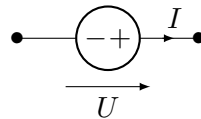


Figure 1

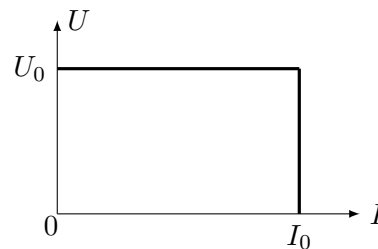


Figure 2

On précise les valeurs choisies de la tension en circuit ouvert $U_0 = 13,5 \text{ V}$ et du courant en court-circuit $I_0 = 1,00 \text{ A}$.

- A.1** L'alimentation stabilisée est-elle un dipôle actif ? passif ? linéaire ?
- A.2** Qu'appelle-t-on « tension en circuit ouvert » et « courant en court-circuit » ?
- A.3** Quel est le signe de la puissance électrique fournie par cette alimentation stabilisée ? Est-ce en accord avec le mode de fonctionnement d'une alimentation stabilisée ?
- A.4** Par quel(s) dipôle(s) équivalent(s) peut-on modéliser cette alimentation stabilisée ? On distinguera les cas en fonction des valeurs de U et/ou de I .

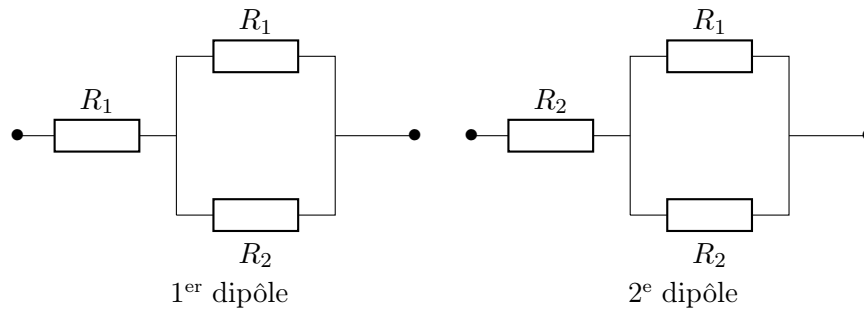
On souhaite brancher un dipôle sur cette alimentation et étudier le fonctionnement du circuit ainsi constitué à l'aide de la caractéristique donnée figure 2.

- A.5** Faire un schéma du montage obtenu si le dipôle branché est un conducteur ohmique de résistance R .

A.6 Préciser la loi d'Ohm pour le conducteur ohmique puis superposer sa caractéristique $U = f(I)$ à celle de l'alimentation stabilisée.

A.7 Le point de fonctionnement d'un circuit est le couple (U, I) vérifiant simultanément les caractéristiques des deux dipôles connectés. Déterminer qualitativement le point de fonctionnement du circuit en distinguant deux cas. Vous préciserez la valeur de la résistance limite R_{lim} entre ces deux cas.

A.8 Déterminer le point de fonctionnement (valeurs de U et I) lorsqu'on branche à ses bornes les dipôles suivants où $R_1 = 5,0 \Omega$ et $R_2 = 20 \Omega$:



A.9 Soit $\mathcal{P}$ la puissance électrique fournie par l'alimentation lorsqu'un conducteur ohmique de résistance R est branché à ses bornes. Déterminer puis tracer la courbe $\mathcal{P} = f(R)$. En déduire la puissance maximale $\mathcal{P}_{\text{max}}$ fournie par l'alimentation et la valeur de la résistance permettant d'atteindre $\mathcal{P}_{\text{max}}$.

B La batterie

La caractéristique de la batterie est donnée ci-dessous en convention générateur :

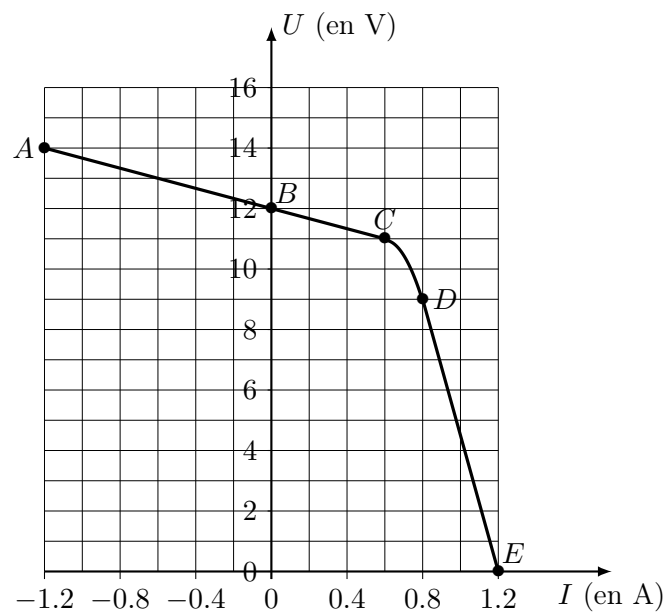


Figure 3

B.1 Dans quel quadrant, la batterie se comporte-t-elle comme un générateur ? un récepteur ? Justifier.

B.2 Quelle tension relève-t-on lorsqu'on branche un simple voltmètre (supposé idéal) sur la batterie ?

On souhaite modéliser la batterie dans chaque domaine linéaire par morceaux. On utilise pour cela un modèle linéaire de Thévenin de force électromotrice E_b et de résistance interne R_b .

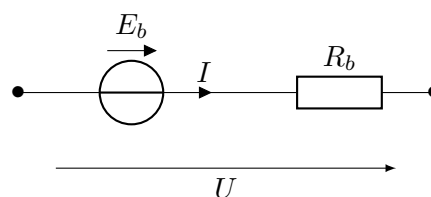


Figure 4

B.3 Tracer l'allure de la caractéristique $U = f(I)$ du modèle de Thévenin ci-dessus en convention générateur.

B.4 Déterminer les valeurs des caractéristiques (E_b, R_b) du générateur de Thévenin équivalent à la batterie dans les domaines de fonctionnement linéaire limités aux parties AC puis DE .

Cette batterie possède une capacité de stockage (ou capacité disponible) de 8,0 A h.

B.5 À quelle grandeur physique cette « capacité » est-elle homogène? Que représente-t-elle?

B.6 Cette batterie est utilisée pour alimenter un petit moteur électrique. Quelle est la puissance électrique délivrée si le courant débité est d'intensité 0,40 A? Pendant combien de temps cette batterie pourra-t-elle alimenter le moteur si on considère qu'elle peut se décharger complètement?

C Recharge de la batterie

On souhaite désormais utiliser l'alimentation stabilisée étudiée dans la partie A (caractérisée par $U_0 = 13,5 \text{ V}$ et $I_0 = 1,00 \text{ A}$) pour recharger la batterie étudiée dans la partie B. Cette batterie est modélisée par une force électromotrice $E_b = 12,0 \text{ V}$ en série avec une résistance $R_b = 1,67 \Omega$. On suppose qu'au cours de la recharge, la tension E_b reste constante.

Le montage correspond à la figure 5 suivante :

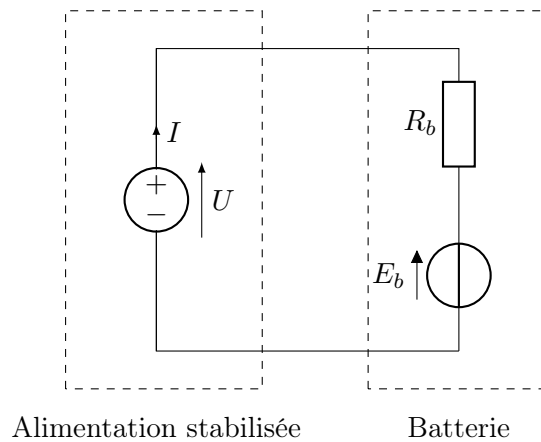


Figure 5

C.1 Déterminer le point de fonctionnement (U, I) du circuit ainsi constitué :

1. par une méthode graphique, en utilisant la caractéristique fournie en annexe,
2. par une méthode analytique basée sur l'utilisation d'un schéma électrique.

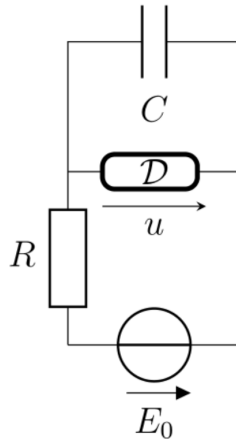
C.2 Calculer, lors de la recharge, la puissance délivrée par l'alimentation stabilisée, la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance R_b et la puissance stockée sous forme d'énergie chimique dans la batterie.

C.3 Déterminer puis calculer le rendement de puissance η , défini comme étant le rapport de la puissance utile sur la puissance dépensée.

C.4 L'énergie chimique maximale stockée dans la batterie étant de 400 kJ, quelle est la durée de la recharge de cette batterie sachant qu'elle était initialement complètement déchargée?

Problème 2 Relaxation d'un oscillateur à tube

On considère le montage de la figure ci-dessous comportant un générateur idéal de tension constante E_0 , un résistor de résistance R , un condensateur de capacité C et un dipôle D assimilé à un résistor de résistance $R_L = \alpha R$.



A Une première équation d'évolution

Dans un tel circuit linéaire, l'équation d'évolution de $u(t)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants dont la solution comporte d'une part une solution de l'équation homogène $u_H(t)$ et d'autre part une solution particulière $u_P(t)$.

A.1 Laquelle de ces deux solutions correspond au régime transitoire ? Sa forme générale dépend-elle de E_0 ?

Proposer un schéma simplifié et en déduire, en effectuant le moins de calculs possible, qu'il s'agit d'une solution caractérisée par une constante de temps τ_α qu'on explicitera en fonction de $\tau_0 = RC$ et de α .

A.2 À quelle condition l'autre solution correspond-elle au régime permanent ? Sa forme générale dépend-elle de C ? des résistances R et R_L ? Proposer un schéma simplifié et en déduire simplement l'expression correspondante u_∞ de u en fonction de α et E_0 .

B Un dipôle à deux états

En réalité, le dipôle D est une lampe contenant un gaz raréfié qui peut être dans deux états électriques (lampe éteinte ou allumée). Ces deux états correspondent chacun à une valeur de α . Le comportement électrique de D diffère selon son état : c'est un assez bon conducteur si elle est allumée, et un assez bon isolant si elle est éteinte.

B.1 Que peut-on dire *a priori* de α si la lampe est éteinte ? si elle est allumée ?

On réalise le circuit avec $R = 20 \text{ k}\Omega$ et $C = 200 \text{ }\mu\text{F}$. Lors du branchement initial du circuit, on admettra que la lampe est éteinte et le condensateur déchargé. Par la suite :

- la lampe reste éteinte tant que la tension à ses bornes vérifie $|u| < U_a$ où $U_a = 90 \text{ V}$ est la tension d'allumage ; dans ce cas elle a pour résistance $R_e \gg R$;
- une fois allumée, la lampe a pour résistance $R_a \approx 1 \text{ k}\Omega$; elle reste allumée sauf si la tension à ses bornes diminue trop et elle va donc s'éteindre dès lors que $|u| < U_e$ où $U_e = 70 \text{ V}$ est la tension d'extinction.

B.2 Exprimer et calculer τ_α dans les deux régimes, successivement lampe éteinte puis allumée.

B.3 Exprimer la limite $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$ si la lampe ne s'allume jamais ; puis si elle reste allumée. En déduire que le système oscille seulement si $E_0 > 0$ est compris dans un intervalle que l'on déterminera. Est-ce le cas avec $E_0 = 120 \text{ V}$, valeur choisie dans la suite ? Ces oscillations seront-elles observables à l'œil ?

C Étude numérique du régime d'oscillation

On propose une étude numérique des oscillations au moyen d'un algorithme dérivé de la méthode d'Euler explicite pour l'étude de $u(t)$; le passage de t à $t + \delta t$ se fait au moyen de la fonction `Next` :

```
1 def Next(u, al , dt):
2     i = (E - u)/R
3     if al:
4         al = u >= Ue
5     else:
6         al = u > Ua
7     u = u + dt*(i - al*u/Ra)/C
8     return u, al
```

C.1 Quelle est la signification de la variable (logique) `al` ? Quel est l'objectif des lignes 3 à 6 ? Justifier, au moyen d'un schéma électrique, la ligne 7.

On propose enfin de tracer l'allure de la courbe représentative de $u(t)$ au moyen du code ci-après :

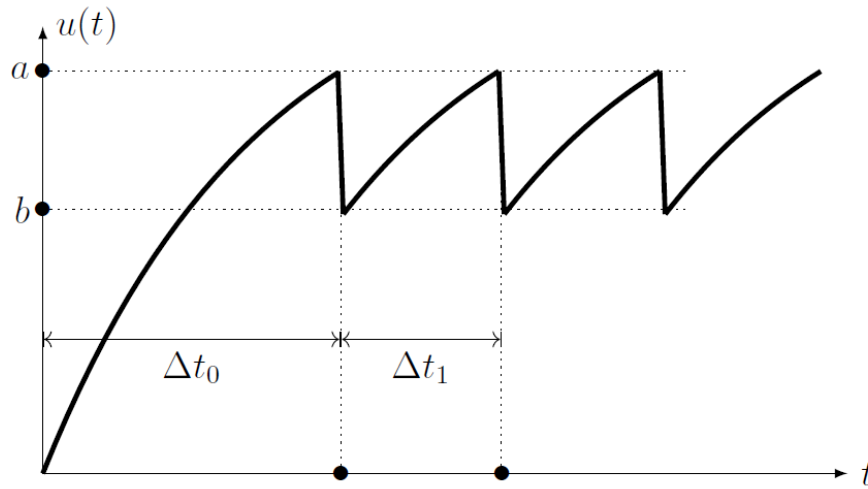
```
1 E = 120.0
2 R = 2.0E4
3 C = 200.0E-6
4 Ua = 90.0
5 Ue = 70.0
6 Ra = 1.0E3
7 tmax = 20.0
8
9 def Etude(tmax , N, u0 , all0):
10     h = tmax/N
11     t, u, all = 0, u0, all0
12     LT = LU = []
13     for k in range(N):
14         LT.append(t)
15         LU.append(u)
16         t = t + h
17         u, all = Next(u, all , h)
18     pl.figure ()
19     pl.plot(LT , LU)
20     pl.show ()
```

suivi de l'exécution des lignes :

```
1 import matplotlib.pyplot as pl
2 Etude(tmax , 500, 0, False)
```

C.2 Le tracé sera-t-il satisfaisant ? Si non, quelle(s) modification(s) proposez-vous ?

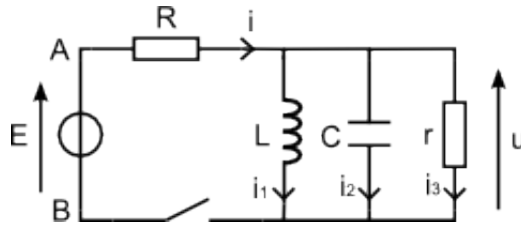
Après rectification si nécessaire, l'allure du tracé obtenu est représenté figure ci-dessous :



C.3 Sur la figure ci-dessus, identifier les phases où la lampe est allumée et celles où elle est éteinte ; quelle est la valeur de a ? La valeur de b dépend en fait du paramètre N de la fonction **Etude** ; avec $N = 500$ on trouve par exemple $b \approx 59 \text{ V}$. Expliquer pourquoi cette valeur reste inférieure à 70 V ?

Problème 3 Étude d'un circuit RLC parallèle

La Figure ci-dessous donne le schéma du montage étudié ; le générateur de tension est idéal, de f.e.m. E constante. Les résistors sont linéaires, de résistances R et r constantes.



Tant que l'interrupteur est ouvert, le condensateur est déchargé et la bobine idéale, d'inductance L , n'est parcourue par aucun courant. À l'instant $t = 0$, l'interrupteur est fermé instantanément et on cherche à déterminer l'évolution ultérieure des grandeurs électriques du réseau.

- Déterminer, par un raisonnement physique simple (pratiquement sans calcul), la tension u et les intensités i , i_1 , i_2 et i_3 dans les quatre branches :
 - juste après la fermeture de l'interrupteur (instant $t = 0^+$),
 - au bout d'une durée très grande ($t \rightarrow \infty$).
- Montrer que l'équation différentielle liant i_3 à ses dérivées par rapport au temps t s'écrit :

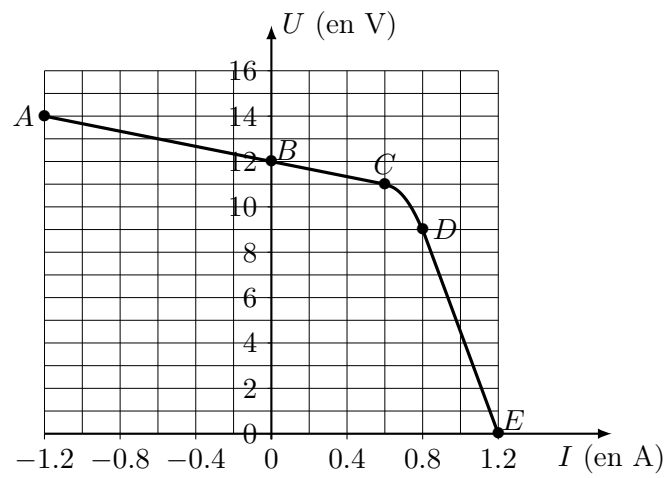
$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{R+r}{rRC} \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC} i_3 = 0$$

- Quelle relation doit-il exister entre R , r , C et L pour que la solution de l'équation différentielle obtenue à la question précédente corresponde à un régime pseudo-périodique ? Vérifier que cette condition est vérifiée lorsque $R = 2,5 \text{ k}\Omega$; $r = 1,3 \text{ k}\Omega$; $C = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$ et $L = 20 \text{ mH}$.
- Montrer que l'équation peut se mettre sous la forme $\frac{d^2 i_3}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$ en exprimant m et ω_0 en fonction des données.
- Calculer numériquement la pulsation propre ω_0 , la période propre T_0 , ainsi que le coefficient m ; que caractérise m ?
- Définir et calculer la pseudopulsation ω et la pseudo-période T . Compte tenu de la précision des données, que peut-on dire des valeurs numériques comparées de ω_0 et ω ?

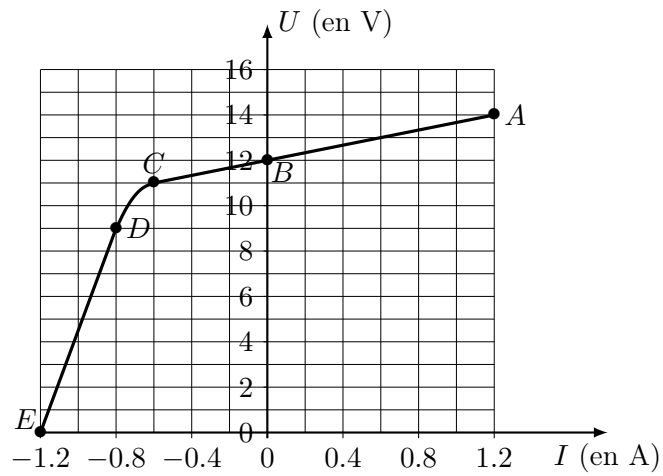
7. Déterminer, en fonction du temps t , les expressions complètes de la tension u et de l'intensité $i_3(t)$ (on pourra utiliser ω et m , notamment pour alléger l'écriture littérale). Calculer numériquement la valeur maximale de u si $E = 6,0 \text{ V}$.
8. On définit le décrement logarithmique $\delta = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{u(t)}{u(t+nT)} \right|$ où n est un entier et T la pseudo-période. Exprimer δ uniquement en fonction de m puis calculer sa valeur ; quel est son intérêt physique ?
9. Donner une estimation du temps nécessaire pour que le régime permanent soit pratiquement établi dans le circuit (on admettra que c'est le cas à partir du moment où l'amplitude de u est toujours inférieure au millièème de sa valeur maximale).
10. On désire visualiser les phénomènes à l'oscilloscope, mais celui-ci ne possède pas de mémoire et on doit donc alimenter le dipôle AB par un signal en forme de créneaux, expliquer pourquoi en quelques mots. Quelle fréquence doit-on choisir pour ce signal afin d'observer convenablement le régime transitoire ?
11. Par ailleurs, on veut observer à la fois la tension u et l'intensité i ; quel problème se pose en général si on utilise un générateur de créneaux basse fréquence en même temps que l'oscilloscope ? Comment y remédier ?

Annexe :

Nom-Prénom :



Caractéristique de la batterie en convention générateur



Caractéristique de la batterie en convention récepteur