

Correction du devoir surveillé n° 5

Problème 1 Utilisation d'une batterie

A L'alimentation stabilisée

A.1 L'alimentation stabilisée est un **dipôle actif** puisqu'elle fournit de la puissance au reste du circuit : $P_{fournie} = UI \geq 0$. On peut évoquer aussi que $U \neq 0$ pour $I = 0$.

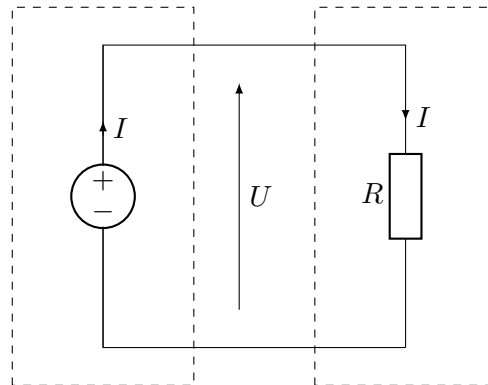
Il s'agit d'un dipôle **non linéaire** sur l'ensemble de la caractéristique mais linéaire par morceaux.

A.2 La « tension en circuit ouvert » est la tension mesurée à vide (autrement dit quand l'alimentation ne débite pas) : $U = U_0$ quand $I = 0$. Le « courant en court-circuit » est le courant parcourant le fil conducteur reliant les deux bornes de l'alimentation : $I = I_0$ quand $U = 0$.

A.3 $P_{fournie} = UI \geq 0$. Cela est cohérent avec le mode de fonctionnement générateur d'une alimentation stabilisée.

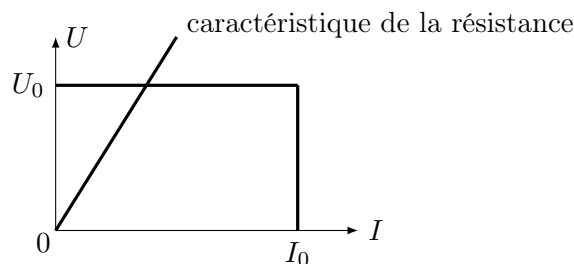
A.4 L'alimentation stabilisée est modélisable par une source idéale de tension de fem U_0 pour $I < I_0$ et par une source idéale de courant de cem I_0 pour $U < U_0$.

A.5 Le montage est le suivant :



Alimentation stabilisée Conducteur ohmique

A.6 D'après la loi d'Ohm pour une résistance en convention récepteur : $\boxed{U = RI}$.



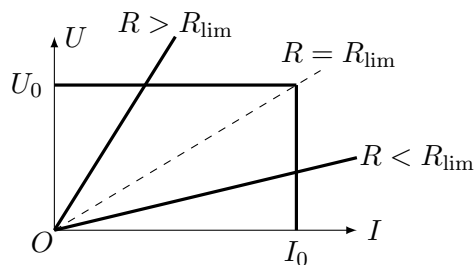
A.7 Le point de fonctionnement du circuit correspond à l'intersection de la caractéristique de l'alimentation (en convention générateur) avec celle de la résistance (en convention récepteur).

Si $R > R_{\text{lim}} = \frac{U_0}{I_0} = 13,5 \Omega$, alors le point d'intersection est dans la partie horizontale de la caractéristique

de l'alimentation : $\boxed{U = U_0}$ et $\boxed{I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R}}$.

Si $R < R_{\text{lim}} = \frac{U_0}{I_0} = 13,5 \Omega$, alors le point d'intersection est dans la partie verticale de la caractéristique

de l'alimentation : $\boxed{I = I_0}$ et $\boxed{U = RI = RI_0}$.



A.8 Le 1^{er} dipôle est équivalent à une résistance $R_{eq1} = R_1 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 9,0 \Omega$ $R_{eq1} < R_{lim}$ donc le point de fonctionnement est dans la partie verticale de la caractéristique de l'alimentation : $I = I_0 = 1,00 \text{ A}$ et $U = RI = RI_0 = 9,0 \text{ V}$.

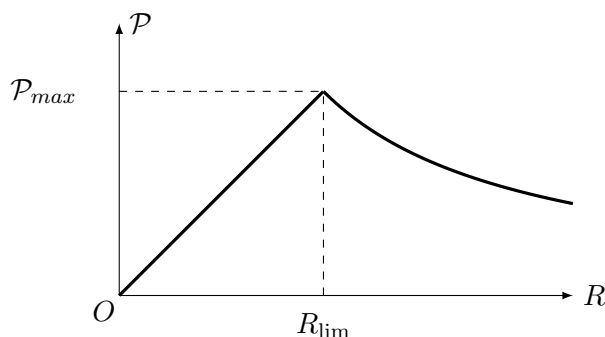
Le 2^e dipôle est équivalent à une résistance $R_{eq2} = R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = 24 \Omega$. $R_{eq2} > R_{lim}$ donc le point de fonctionnement est dans la partie horizontale de la caractéristique : $U = U_0 = 13,5 \text{ V}$ et $I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} = 0,56 \text{ A}$.

A.9 La puissance fournie par l'alimentation correspond à la puissance reçue par la résistance R : $\mathcal{P} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}$.

— Pour $R < R_{lim}$: $I = I_0$ donc $\mathcal{P} = RI_0^2$ (droite passant par l'origine).

— Pour $R > R_{lim}$: $U = U_0$ donc $\mathcal{P} = \frac{U_0^2}{R}$ (portion d'hyperbole).

On observe que la puissance maximale est atteinte pour $R = R_{lim}$ ce qui correspond à $\mathcal{P}_{max} = R_{lim}I_0^2 = \frac{U_0^2}{R_{lim}} = \frac{U_0 I_0}{1} = 13,5 \text{ W}$.



B La batterie

B.1 La batterie se comporte comme un générateur dans le quadrant de droite pour lequel $\mathcal{P}_{fournie} = UI \geq 0$ et comme un récepteur dans le quadrant de gauche pour lequel $\mathcal{P}_{fournie} = UI \leq 0$

B.2 Lorsqu'on branche un voltmètre sur la batterie, on relève la tension à vide appelée tension en circuit ouvert puisqu'un voltmètre idéal est modélisable par une résistance infinie et donc un circuit ouvert. On mesure $U_B = 12,0 \text{ V}$.

On souhaite modéliser la batterie dans chaque domaine linéaire par morceaux. On utilise pour cela un modèle linéaire de Thévenin de force électromotrice E_b et de résistance interne R_b .

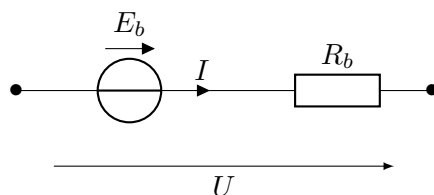
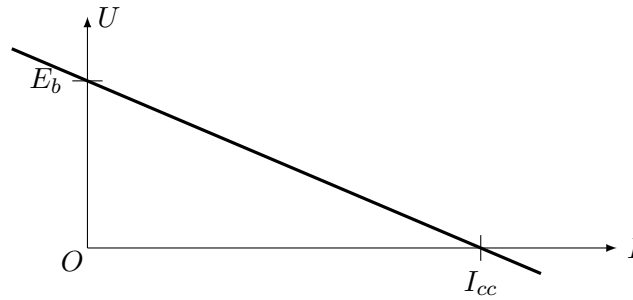


Figure 4

B.3 La caractéristique $U = f(I) = E_b - R_b I$ de cette source (en convention générateur) a l'allure d'une droite d'ordonnée à l'origine E_b et de pente $-R_b$. Cette droite coupe l'axe des abscisses en $I_{cc} = \frac{E_b}{R_b}$ (intensité de court-circuit obtenue pour $U = 0$).



B.4 Dans la partie AC, on lit $E_b = \underline{12,0 \text{ V}}$ et $R_b = -\frac{14,0 - 12,0}{-1,20 - 0} = \underline{1,67 \Omega}$

Dans la partie DE, on lit $R_b = -\frac{0 - 9,00}{1,20 - 0,80} = \underline{22,5 \Omega}$. La droite coupe l'axe des abscisses en $I_{cc} = \frac{E_b}{R_b} = 1,20 \text{ A}$ soit $E_b = R_b I_{cc} = \underline{27,0 \text{ V}}$.

B.5 $1 \text{ As} = 1 \text{ Cs}^{-1} \text{ s} = 1 \text{ C}$ et $1 \text{ Ah} = 3600 \text{ C}$: la « capacité » est homogène à une charge. Elle représente la charge maximale stockée dans la batterie qui pourra être restituée au circuit lors de sa décharge.

B.6 Sur la caractéristique de la batterie (en convention générateur), on lit $U = 11,3 \text{ V}$ pour $I = 0,40 \text{ A}$. La puissance électrique délivrée par la batterie vaut donc $\boxed{\mathcal{P} = UI}$. A.N. : $\underline{\mathcal{P} = 4,5 \text{ W}}$.

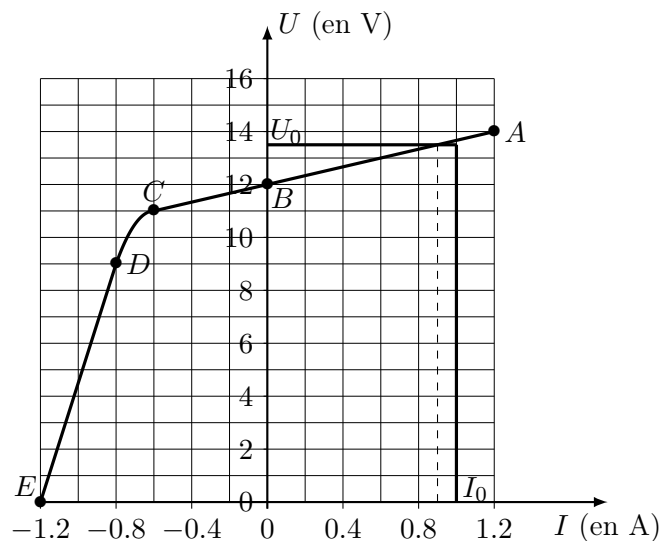
La décharge de la batterie (pour alimenter le moteur) se fait à intensité constante : $\bar{I} = 0,40 \text{ A}$. Notons Δt la durée de la décharge de la batterie (et de l'alimentation du moteur) et $Q = 8,0 \text{ Ah} = 29 \times 10^3 \text{ C}$ la charge totale qui va circuler dans le circuit (pendant toute la décharge). On a $I = \frac{Q}{\Delta t}$.

D'où $\boxed{\Delta t = \frac{Q}{I}}$. A.N. : $\underline{\Delta t = 20 \text{ h}}$.

C Recharge de la batterie

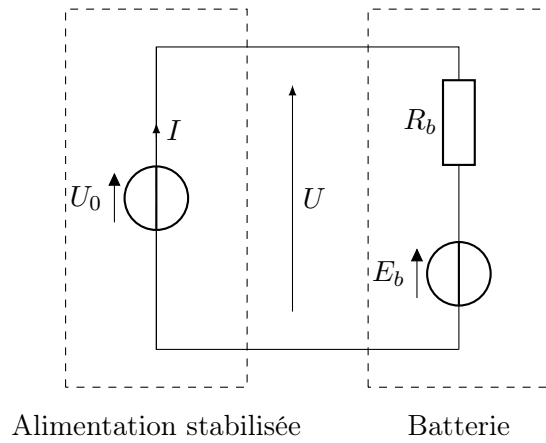
C.1 méthode graphique :

La point de fonctionnement (U, I) du circuit est l'intersection de la caractéristique de l'alimentation stabilisée (en convention générateur) avec celle de la batterie (**en convention récepteur**) : $\underline{U = 13,5 \text{ V}}$ et $\underline{I = 0,90 \text{ A}}$.



méthode analytique :

Dans ce circuit, l'alimentation stabilisée est modélisable par une source idéale de tension de fem U_0 . On peut donc raisonner avec le circuit électrique équivalent ci-dessous.



On a $U = U_0$ et la loi des mailles donne : $U_0 - R_b I - E_b = 0$

soit
$$I = \frac{U_0 - E_b}{R_b} = \underline{0,898 \text{ A}}.$$

On en déduit ensuite $U = E_b + R_b I = \underline{13,5 \text{ V}}.$

C.2 Lors de la recharge :

- la puissance délivrée par l'alimentation stabilisée vaut $\mathcal{P}_{\text{alim}} = U_0 I = \underline{12,1 \text{ W}},$
- celle dissipée par effet Joule dans la résistance R_b vaut $\mathcal{P}_{\text{Joule}} = R_b I^2 = \underline{1,35 \text{ W}},$
- celle stockée sous forme d'énergie chimique vaut $\mathcal{P}_{\text{stockée}} = E_b I = \underline{10,8 \text{ W}}.$

On vérifie bien : $\mathcal{P}_{\text{alim}} = \mathcal{P}_{\text{Joule}} + \mathcal{P}_{\text{stockée}}.$

C.3 Le rendement de puissance vaut $\rho = \frac{\text{puissance utile}}{\text{puissance dépensée}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{stockée}}}{\mathcal{P}_{\text{alim}}}.$

D'où
$$\rho = \frac{E_b}{U_0} = \underline{0,889}$$

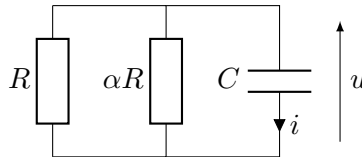
C.4 $E_{\text{stockée}} = \mathcal{P}_{\text{stockée}} \Delta t = E_b I \Delta t.$ Ainsi
$$\Delta t = \frac{E_{\text{stockée}}}{E_b I} = 37,1 \times 10^3 \text{ s} = \underline{10,3 \text{ h}}.$$

Problème 2 Relaxation d'un oscillateur à tube

A Une première équation d'évolution

A.1 La solution de l'équation homogène correspond au régime transitoire. Sa forme est indépendante de E_0 puisque E_0 intervient dans le second membre.

Pour trouver la solution on peut refaire le schéma sans la source de tension E_0 :

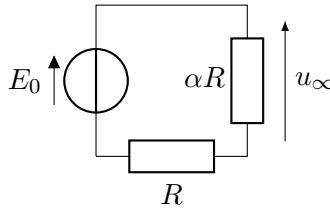


L'association des deux résistances en parallèles donne une résistance équivalente $R_{eq} = \frac{\alpha R}{1+\alpha}$, on obtient ensuite l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ avec $u(t) = -R_{eq} i = -R_{eq} C \frac{du}{dt}$ (convention générateur pour la résistance).

On identifie alors une équation de la forme : $\frac{du}{dt} + \frac{u}{\tau_\alpha} = 0$ avec $\tau_\alpha = \frac{\alpha RC}{1+\alpha} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \tau_0$

A.2 La solution $u_P(t)$ correspond à un régime permanent si E_0 est constante soit u_P indépendant du temps. En régime permanent un condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc C n'interviendra pas dans le régime permanent en revanche u_P peut dépendre des résistances R et R_L .

Le schéma équivalent en régime permanent s'écrit :



On reconnaît un diviseur de tension $u_\infty = \frac{\alpha}{1+\alpha} E_0$

B Un dipôle à deux états

B.1 La lampe se comporte comme un bon conducteur lorsqu'elle est allumée, sa résistance $R_a = \alpha_a R$ est donc faible, alors qu'elle se comporte comme un bon isolant éteinte : sa résistance $R_e = \alpha_e R$ est élevée. On peut alors dire que $\alpha_a \ll \alpha_e$.

B.2 On réutilise le résultat de la question A.1 : $\tau_\alpha = \frac{\alpha}{1+\alpha} \tau_0$. Lorsque la lampe est éteinte :

$\tau_e = \tau_0 = RC = 4,0 \text{ s}$ alors que lorsque la lampe est allumée $\tau_a = \frac{RR_a}{R+R_a} C = 0,19 \text{ s}$

B.3 On réutilise cette fois ci es résultats de la question A.2 : $u_\infty^e = E_0$ et $u_\infty^a = \frac{R_a}{R+R_a} E_0$.

Il y aura des oscillations si $u_\infty^e > U_a$ soit $E_0 > U_a$ et si $u_\infty^a < U_e$ soit $\frac{R_a}{R+R_a} E_0 < U_e$ d'où $E_0 < U_e \frac{R+R_a}{R_a}$.

L'application numérique donne $90 \text{ V} < E_0 < 1,5 \text{ kV}$ Le cas $E_0 = 120 \text{ V}$ respecte ces conditions et le système oscillera.

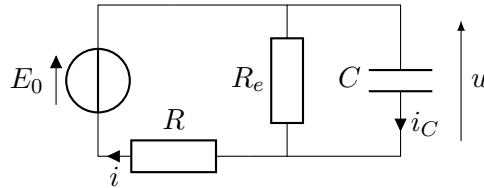
Le temps de réponse de l'œil est de l'ordre du dixième de seconde, τ_e et τ_a sont supérieurs à ce temps de réponse, donc les oscillations seront observables à l'œil.

C Étude numérique du régime d'oscillation

C.1 La variable `al` est un booléen qui prend la valeur `True` si la lampe est allumée et `False` si la lampe est éteinte (conditions d'allumage de la lampe).

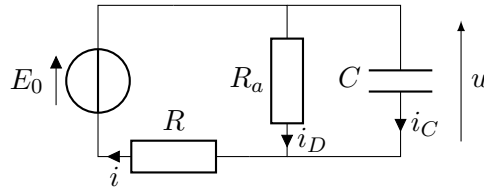
Les lignes 3 à 6 testent le caractère allumé ou éteint de la lampe à l'instant t . A chaque instant on fait ce teste pour déterminer la valeur de $(t + \delta t)$ avec la bonne équation différentielle.

On refait le schéma électrique lorsque la lampe est éteinte ($R_e \gg R$) :



Comme $R_e \gg R$, la résistance se comporte comme un circuit ouvert et $i = i_C$. $i = C \frac{du}{dt}$ soit au premier ordre $du = u(t + dt) - u(t) = \frac{i}{C} dt$. On vérifie lorsque `al=False` la ligne 7 : $u(t + dt) = u(t) + dt * i/C$

On refait le schéma électrique lorsque la lampe est allumée (R_a) :



On a ainsi $i_D = u/R_a$ (loi d'Ohm), $Ri = E_0 - u$ (loi des mailles), $i_C = C \frac{du}{dt}$ et $i = i_D + i_C$. On souhaite obtenir la relation entre du , u et i :

$$i_C = C \frac{du}{dt} = i - i_D = i - \frac{u}{R_a}. \text{ On retrouve ainsi } du = u(t + dt) - u(t) = \frac{dt}{C} (1 - \frac{u}{R_a})$$

C.2 Le code ne convient pas en raison d'une copie de liste : les listes `LT` et `LU` ne sont pas indépendantes. La solution serait de remplacer la ligne 12 par `LT,LU=[], []` pour créer deux listes vides indépendantes.

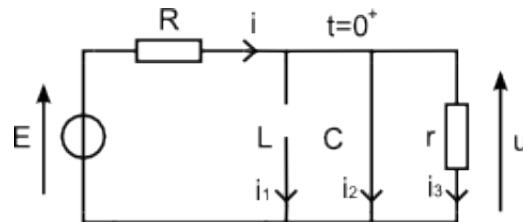
C.3 La lampe est allumée lorsque la tension décroît. La lampe est éteinte lorsque la tension croît.

$$a = U_a = 90 \text{ V}.$$

b ne devrait pas être inférieur à 70 V en pratique, mais lors de la résolution numérique la période d'échantillonnage ($T_e = \frac{20}{500} = 40 \text{ ms}$) n'est pas très petit devant $\tau_a = 0,19 \text{ s}$ ce qui entraîne des erreurs de numérisation. Il faudrait augmenter le nombre de points de calculs pour résoudre ce problème.

Problème 3 Étude d'un circuit RLC parallèle

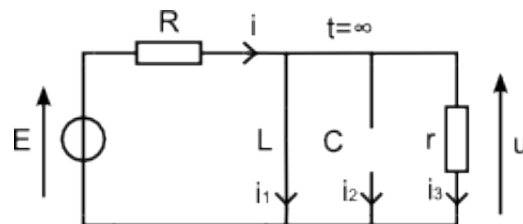
- Juste après la fermeture de l'interrupteur on sait qu'il y a continuité du courant traversant la bobine et continuité de la tension aux bornes du condensateur. À $t = 0^-$, la tension aux bornes du condensateur est nulle (condensateur déchargé $u(0^-) = q(0^-)/C$) donc à $t = 0^+$ le condensateur se comporte comme un fil. Le courant étant nul initialement dans la bobine à $t = 0^+$ elle se comporte alors comme un circuit ouvert. Le circuit équivalent à $t = 0^+$ devient alors :



On déduit alors $u(t = 0^+) = 0 \text{ V}$, $i_1(t = 0^+) = 0 \text{ A}$, $i_3(t = 0^+) = \frac{u(t=0^+)}{r} = 0 \text{ A}$ et

$$i(t = 0^+) = i_2(t = 0^+) = \frac{E}{R}.$$

Au bout d'un temps très long, le régime permanent est atteint, et les grandeurs sont indépendantes du temps ; la bobine se comporte alors comme un fil et le condensateur comme un circuit ouvert. Le circuit équivalent à $t = \infty$ devient alors :



On déduit alors $u(\infty) = 0 \text{ V}$ (résistance r court-circuitée), $i_2(\infty) = 0 \text{ A}$, $i_3(\infty) = \frac{u(\infty)}{r} = 0$ et $i_1(\infty) = i(\infty) = \frac{E}{R}$.

- L'équation différentielle liant i_3 à ses dérivées par rapport au temps t s'établit en appliquant la loi des noeuds et la loi des mailles ainsi que les relations liant le courant à la tension dans les différents dipôles.

$$E = Ri + u$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) + i_3(t)$$

$$u(t) = L \frac{di_1}{dt}$$

$$i_2(t) = C \frac{du}{dt}$$

$$u(t) = ri_3(t)$$

En utilisant les deux premières équations on obtient :

$$E = R(i_1 + i_2 + i_3) + u$$

On dérive alors cette expression pour pouvoir remplacer i_1 . On obtient alors en remplaçant i_1 et i_2 par les équations ci dessus :

$$R \left(\frac{u}{L} + C \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{di_3}{dt} \right) + \frac{du}{dt} = 0$$

Et en remplaçant u par ri_3 on obtient finalement :

$$\frac{Rr}{L} i_3(t) + RrC \frac{d^2 i_3}{dt^2} + R \frac{di_3}{dt} + r \frac{di_3}{dt} = 0$$

$$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{R+r}{rRC} \frac{di_3}{dt} + \frac{1}{LC} i_3 = 0$$

3. Si l'on souhaite que le régime soit pseudo-périodique il faut que le discriminant de l'équation caractéristique soit négatif : $x^2 + \frac{R+r}{rRC}x + \frac{1}{LC} = 0$ et $\Delta = \left(\frac{R+r}{rRC}\right)^2 - \frac{4}{LC}$. On obtient : $\frac{R+r}{2rR} < \sqrt{\frac{C}{L}}$. En faisant l'application numérique on vérifie cette condition ($6.10^{-4} < 7.10^{-3}$ (en Ω^{-1})).
4. On obtient $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $m = \frac{R+r}{2rRC\omega_0} = \frac{R+r}{2rR} \sqrt{\frac{L}{C}}$ pour obtenir l'équation $\frac{d^2 i_3}{dt^2} + 2m\omega_0 \frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$.
5. AN : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 7,1 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 8,9 \times 10^{-4} \text{ s}$ et $m = 8,3 \times 10^{-2}$. Le coefficient m est un facteur sans dimension appelé facteur d'amortissement. Plus il est grand, plus les oscillations sont amorties.
6. La pseudopulsation est la partie imaginaire des racines du polynôme caractéristique ; on obtient $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - m^2}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Dans ce cas m étant très faible la pseudopulsation ω est peu différente de la pulsation propre ω_0 et la précision des données (2 chiffres significatifs) ne permet pas de les différencier.
7. Le régime étant pseudopériodique $i_3(t)$ est de la forme :

$$i_3(t) = e^{-m\omega_0 t} (K_1 \cos \omega t + K_2 \sin \omega t)$$

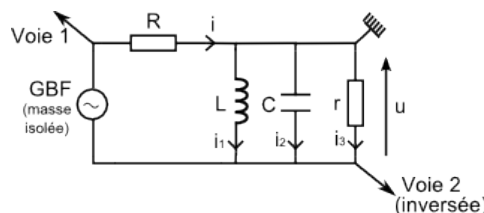
et $i_3(0) = 0$ donc $K_1 = 0$ donc $i_3(t) = K_2 e^{-m\omega_0 t} \sin \omega t$. De plus on a $u(t) = r i_3(t) = K_2 r e^{-m\omega_0 t} \sin \omega t$ et $i_2 = C \frac{du}{dt} = K_2 r C e^{-m\omega_0 t} (\omega \cos \omega t - m\omega_0 t \sin \omega t)$ et $i_2(0) = \frac{E}{R}$ donc $K_2 r C \omega = \frac{E}{R}$ soit $K_2 = \frac{E}{RrC\omega}$. On a alors :

$$i_3(t) = \frac{E}{RrC\omega} e^{-m\omega_0 t} \sin \omega t$$

$$u(t) = r i_3(t) = \frac{E}{RC\omega} e^{-m\omega_0 t} \sin \omega t$$

La valeur de $u(t)$ est maximale lorsque $\sin \omega t = 1$ pour la première fois. De ce fait $t = \frac{\pi}{2\omega}$ et $u_{max} = \frac{E}{RC\omega} e^{-\frac{m\omega_0 \pi}{2\omega}}$. L'application numérique conduit à : $u_{max} = 0,30 \text{ V}$.

8. Le décrément logarithmique δ traduit la décroissance du signal sur une pseudopériode : $\delta = \frac{1}{n} \ln \frac{u(t)}{u(t+nT)} = m\omega_0 T = \frac{2\pi m}{\sqrt{1-m^2}} \approx 2\pi m = 0,52$. Le décrément logarithmique se mesure entre deux maxima et permet d'accéder aux caractéristiques du système. On peut déterminer la valeur de m par la mesure du décrément logarithmique et ainsi revenir aux valeurs d'un composant inconnue si on connaît l'évolution temporelle d'une grandeur.
9. On considère que le régime permanent est obtenu pour : $u(t_p) = \frac{u_{max}}{1000}$. Chaque maximum de la tension $u(t)$ est obtenu pour $\sin \omega t = +1$. Le régime permanent est donc obtenu lorsque : $\frac{E}{RC\omega} e^{-m\omega_0 t} < 10^{-3} u_{max}$ soit $e^{-m\omega_0 t} < \frac{RC\omega 10^{-3} u_{max}}{E}$ soit $t > \frac{1}{m\omega_0} \ln \left[\frac{E}{RC\omega 10^{-3} u_{max}} \right]$. Soit $t > 1,2 \cdot 10^{-2} \text{ s}$.
10. Le phénomène est transitoire, il est donc furtif. Pour le visualiser à l'oscilloscope il faut rendre ce phénomène périodique (ou alors utiliser un mode single). L'alimentation par une tension crêteaux simule une ouverture et une fermeture périodique de l'interrupteur. Il faut donc que la période du signal crêteaux T_C soit grande devant la pseudopériode $T = \frac{2\pi}{\omega}$ de la tension pseudopériodique. Si on prend $T_c = 2t_p$ la visualisation du phénomène sera correcte, d'où $f_C = \frac{1}{T_c} = 45 \text{ Hz}$.
11. L'observation conjointe de $u(t)$ et $i(t)$ pose le problème du choix d'une borne commune pour les prises de mesure. Cette borne commune est souvent la masse. On peut isoler la sortie du GBF de la masse à l'aide d'un transformateur d'isolement, ce qui permet de fixer arbitrairement une référence de potentiel à un noeud choisi :



La voie 1 de l'oscilloscope permet la mesure de $Ri(t)$, la voie 2 inversée donne $u(t)$. Une autre solution est d'utiliser une différence de deux voies de l'oscilloscope.