

Durée de l'épreuve : 3h

La **présentation**, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la **rédaction**, la **clarté** et la **précision** des raisonnements entreront pour une **part importante** dans l'appréciation **des copies**. En particulier, les résultats non justifiés ne seront pas pris en compte. Les candidats sont invités à encadrer les résultats de leurs calculs.

### Problème 1 :

Un petit anneau  $A$  assimilé à un point matériel de masse  $m$  et portant une charge électrique  $q < 0$  est astreint à se déplacer sans frottement sur une tige horizontale  $Ox$ . Il est soumis en outre à l'action d'une charge  $Q > 0$  placée en un point fixe  $B$ , situé à la distance  $a$  de  $O$  sur l'axe vertical  $Oz$ .

On note  $r$  la distance  $AB$ ,  $\vec{u}_r$  un vecteur unitaire orienté de  $B$  vers  $A$  et  $\epsilon_0$  la permittivité du vide.

- 1) Donner l'expression de la force électrostatique  $\vec{F}$  exercée par  $B$  sur  $A$ , en fonction de  $q$ ,  $Q$ ,  $\epsilon_0$ ,  $r$  et  $\vec{u}_r$ .
- 2) Etablissez l'expression de la fonction énergie potentielle  $E_p(r)$  dont dérive la force  $\vec{F}$ . On fera l'hypothèse que  $E_p(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow \infty$ .
- 3) En explicitant la distance  $r$  en fonction des données, montrer que :

$$E_p(x) = \frac{q \cdot Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot \sqrt{a^2 + x^2}}$$

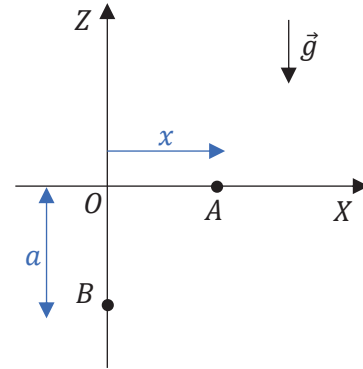
- 4) Effectuer le bilan des forces agissant sur le point  $A$  et indiquer, pour chacune d'entre elles, si elle travaille ou non pour un déplacement le long de l'axe  $Ox$ .
  - 5) Justifier que l'anneau  $A$  constitue un système conservatif.
  - 6) Dessiner l'allure de la fonction  $E_p(x)$  et vérifier que le point  $O$  est une position d'équilibre stable (on sera attentif au fait que  $q \cdot Q < 0$ ).
  - 7) L'anneau est lancé depuis le point  $O$  avec une vitesse initiale de valeur  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_x$  (avec  $\vec{u}_x$  vecteur unitaire orienté dans la direction  $Ox$ ). En vous appuyant sur une analyse graphique, montrer qu'il existe deux types de mouvements différents selon la valeur de l'énergie mécanique  $E_m$  de l'anneau.
  - 8) Déterminer la valeur minimale de  $v_0$  notée  $v_{min}$  au-dessus de laquelle le mouvement de l'anneau correspond à un état de diffusion (ou état libre).
  - 9) On donne  $\epsilon_0 = 8,8 \cdot 10^{-12} \text{ S.I.}$ ,  $q = -Q = -0,15 \mu\text{C}$ ,  $m = 2,0 \text{ g}$  et  $a = 10 \text{ cm}$ . Calculer la valeur minimale  $v_{min}$ .
  - 10) Dans le cas où  $v_0 = v_{min}$  donner l'expression de la vitesse  $v$  en fonction de  $x$ .
  - 11) L'anneau est lancé avec une vitesse de valeur  $\frac{v_{min}}{2}$ . Déterminer en fonction de  $a$ , l'abscisse  $x_{max}$  à laquelle il va s'arrêter.
- On s'intéresse à présent aux petits mouvements de l'anneau au voisinage de sa position d'équilibre  $x = 0$ . On rappelle que pour  $\frac{x}{a} \ll 1$  :

$$\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2 \cdot a^2}$$

- 12) Montrer que pour  $x \ll a$ , l'énergie potentielle peut se mettre sous la forme :

$$E_p(x) = E_p(0) + \frac{1}{2} \beta \cdot x^2$$

où  $\beta$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $q$ ,  $Q$ ,  $\epsilon_0$  et  $a$ .



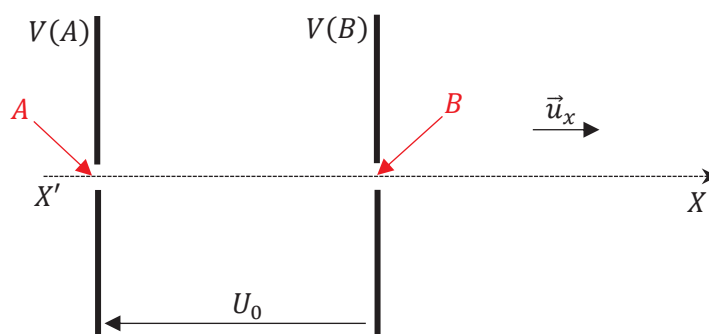
- 13) En exploitant la conservation de l'énergie mécanique, établir l'équation différentielle du second ordre à laquelle obéit l'abscisse  $x$ . En déduire que le mouvement de  $A$  est celui d'un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre  $\omega$  en fonction de  $\beta$  et  $m$  puis de  $m, q, Q, \varepsilon_0$  et  $a$ .
- 14) Calculer la valeur numérique de  $\omega$  ainsi que celle de la période  $T$  des oscillations avec les valeurs données à la question 9).

## Problème 2 : Etude d'une lentille électrostatique

Dans ce problème, nous étudierons les propriétés focalisantes d'une lentille électrostatique sur un faisceau d'électrons de vitesse  $\vec{v}_0$ . Ce problème est composé de deux parties : l'étude de l'accélérateur linéaire qui permet d'accélérer des électrons de vitesse initiale négligeable jusqu'à une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_x$  puis l'étude de la lentille électrostatique.

### Première partie : l'accélérateur linéaire

On considère un accélérateur linéaire composé de deux plaques métalliques portées aux potentiels électriques  $V(A)$  et  $V(B)$ . On note  $U_0 = V(A) - V(B)$  la différence de potentiel entre les deux plaques.



Des électrons (de charge  $q = -e$ ) pénètrent avec une vitesse initiale négligeable à l'entrée de l'accélérateur linéaire en  $A$ . On suppose que le champ électrique, noté  $\vec{E}_0$  est uniforme et stationnaire entre les deux plaques de l'accélérateur.

- 1) Donner la définition d'un champ uniforme et stationnaire.
- 2) On pose  $\vec{E}_0 = E_0 \cdot \vec{u}_x$ . Quel doit être le signe de  $E_0$  pour que les particules soient accélérées entre les points  $A$  et  $B$  ?
- 3) Que peut-on dire du signe de la tension accélératrice  $U_0$  ? Justifier.
- 4) On assimile un électron à un point matériel  $M$  de masse  $m$  observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen. On suppose que l'électron n'est soumis qu'à la force de Lorentz électrique dans l'accélérateur linéaire. Justifier que l'énergie mécanique de l'électron est constante et donnée par :

$$E_m(M) = \frac{1}{2} m \cdot v^2(M) + q \cdot V(M)$$

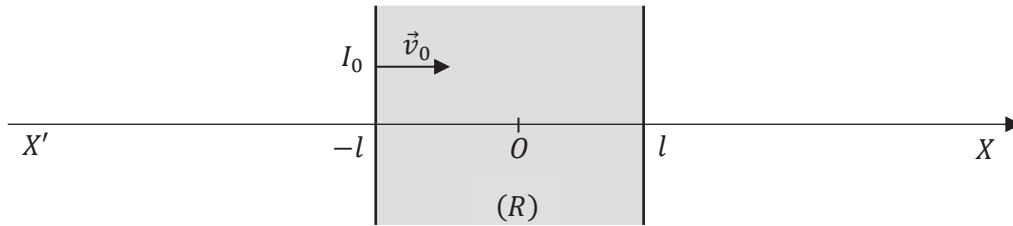
en faisant l'hypothèse que l'énergie potentielle d'interaction de l'électron avec le potentiel  $V(M)$  est nul quand le potentiel électrique est nul.

- 5) On note  $v_0$  la vitesse des électrons à la sortie de l'accélérateur linéaire (au point  $B$ ). Déterminer  $v_0$  en fonction de  $e, m$  et  $U_0$ .
- 6) On donne  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ ,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$  et  $U_0 = 3,0 \cdot 10^3 \text{ V}$ . Calculer la vitesse des électrons à la sortie de l'accélérateur linéaire.

### Deuxième partie : la lentille électrostatique

A la sortie de l'accélérateur linéaire, les électrons de vitesse initiale  $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{u}_x$  subissent les effets d'une lentille électrostatique. Dans celle-ci, un champ électrostatique  $\vec{E}$  non uniforme règne dans une région  $(R)$  du laboratoire telle que :  $-l \leq x \leq l$  et  $y^2 + z^2 \leq r^2$ .  $(R)$  possède une symétrie cylindrique et constitue une « lentille électrostatique ».

## Lentille électrostatique



Le champ électrostatique dans  $(R)$  a pour expression :

$$\vec{E} = -2.\beta.x.\vec{u}_x + \beta.y.\vec{u}_y + \beta.z.\vec{u}_z$$

où  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  sont les vecteurs unitaires du trièdre orthonormé  $Oxyz$ ,  $\beta$  est une constante.  $l$  et  $r$  sont des données. On suppose  $r < l$ . A l'instant choisi pour origine des dates ( $t = 0$ ), un électron de vitesse  $\vec{v}_0 = v_0.\vec{t}$  pénètre en  $I_0$  dans  $(R)$ . A cet instant :  $x = x_0 = -l$  ;  $y = y_0 \ll r$  ;  $z = z_0 \ll r$ . Un électron est assimilé à un point matériel  $M$  de masse  $m$  (et de charge  $q = -e$ ) observé dans le référentiel terrestre supposé galiléen

- 1) Montrer que, à l'extérieur de  $(R)$ , le mouvement d'un électron est rectiligne et uniforme si on néglige son poids et l'action de tout champ électrique ou magnétique.
- 2) Comment choisir le signe de  $\beta$  si l'on veut que le champ  $\vec{E}$  tende à rapprocher l'électron de l'axe  $X'X$  ?
- 3) Justifier par des ordres de grandeur que les effets du poids sont négligeables devant ceux de la force de Lorentz électrique dans la lentille électrostatique.
- 4) Donner l'expression de son vecteur accélération dans  $(R)$ . En déduire les coordonnées du vecteur accélération en fonction de  $\beta$ ,  $e$ ,  $m$  et des coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  de l'électron.
- 5) Montrer que les équations différentielles vérifiées séparément par  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont :

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2.\omega^2.x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2.y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2.z = 0 \end{cases}$$

avec  $\omega$  pulsation que l'on exprimera en fonction  $\beta$ ,  $e$  et  $m$ .

- 6) Montrer que la solution de l'équation différentielle en  $x$  peut s'exprimer sous la forme :

$$x(t) = A.e^{k.t} + B.e^{-k.t}$$

avec  $k > 0$  que l'on exprimera en fonction de  $\omega$ ,  $A$  et  $B$  constantes que l'on déterminera en fonction des données.

- 7) Dans toute la suite, on supposera satisfaite la condition  $v_0 \gg \omega.l$ .

Montrer que sous cette condition, l'expression de  $x(t)$  peut s'écrire :  $x(t) = -l + v_0 t$ . Que peut-on alors dire de la vitesse  $\dot{x}$  de l'électron pendant la traversée de la région  $(R)$  ? On rappelle le développement limité de la fonction exponentielle pour  $x \ll 1$  :  $e^x = 1 + x$ .

- 8) Résoudre les équations différentielles en  $y$  et en  $z$ . Montrer que la trajectoire électronique reste au voisinage de  $x'x$  (hypothèse paraxiale). Quelle est l'hypothèse correspondante en optique ?

- 9) En déduire les expressions des vitesses  $\dot{y}$  et  $\dot{z}$ . En donner ensuite la forme approchée sous la condition  $v_0 \gg \omega.l$ .

- 10) Donner les coordonnées du vecteur vitesse en  $I$  sur la face de sortie de la lentille. D'après le résultat établi question 2, en déduire les équations horaires du mouvement de l'électron après traversée de la lentille.

- 11) Montrer que la trajectoire de l'électron coupe l'axe  $OX$  en un point  $F'$  dont on déterminera la position.

La position de  $F'$  dépend-elle de  $l$  ? Justifier le nom de foyer donné à  $F'$ . Cette lentille électrostatique est-elle convergente ou divergente ? Comment peut-on agir sur sa distance focale ?

12) Calculer la distance focale  $f' = \overline{OF'}$  pour  $l = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}$  ;  $\frac{\omega \cdot l}{v_0} = 1,0 \cdot 10^{-2}$ .

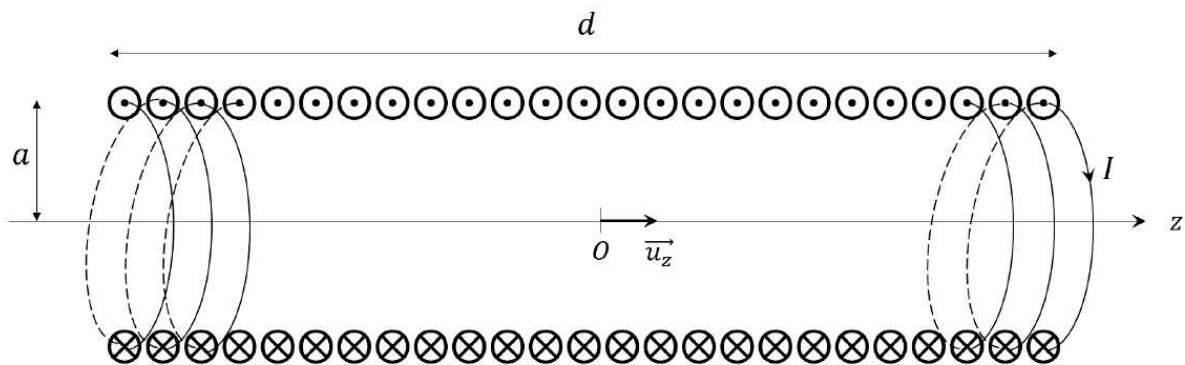
### Problème n°3 : Confinement magnétique d'un plasma

Pour répondre à la raréfaction des énergies fossiles, il est nécessaire de trouver de nouvelles sources d'énergie décarbonées. Parmi celles-ci, la fusion thermonucléaire est une des pistes à long terme qui donne lieu à une coopération internationale sans précédent avec le projet de recherche ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), dont les installations sont implantées à Cadarache dans les Bouches-du-Rhône.

La fusion thermonucléaire consiste à faire entrer en collision deux noyaux légers pour obtenir un noyau plus lourd. Dans un réacteur de fusion, la matière est à l'état de plasma. On appelle plasma un état de la matière constitué d'ions, d'électrons libres et d'espèces neutres. Cet état résulte des très hautes températures atteintes dans le réacteur qui permettent l'ionisation des atomes. Dans ce problème, on s'intéresse au confinement magnétique du plasma de fusion dans le réacteur par l'étude du mouvement d'une unique particule chargée au sein du plasma : un cation de masse  $m$  et de charge électrique  $q = e$  (les cas d'un électron se traitant de manière similaire). On supposera que seule la force magnétique agit sur le cation et qu'aucune collision n'a lieu avec les autres espèces présentes dans le plasma.

#### I. Confinement d'une particule chargée dans un champ magnétique stationnaire et uniforme

Le champ magnétique nécessaire au confinement du plasma est créé par un solénoïde d'axe ( $Oz$ ) orienté par le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$  constitué de  $N$  spires de rayon  $a$ , régulièrement réparties sur une longueur  $d \gg a$ . Toutes les spires sont parcourues par un courant d'intensité  $I$  constant (cf figure 1 ci-dessous).



**Figure 1** - Schéma du solénoïde. Seules quelques spires sont représentées par souci de lisibilité

On fait l'hypothèse que le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde, de la forme  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z$  (avec  $B_0 > 0$ ). On s'intéresse au mouvement d'un cation de masse  $m$  et de charge  $e$  à l'intérieur de ce solénoïde.

1) Montrer que la puissance de la force magnétique est nulle. En déduire que l'énergie cinétique du cation se conserve. Par la suite, on notera  $v_0$  la norme constante de la vitesse du cation au cours de son mouvement.

On suppose d'abord que le cation a un mouvement circulaire dans un plan perpendiculaire au champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z$ .

2) Représenter sur un schéma le vecteur vitesse  $\vec{v}$  du cation, le champ magnétique  $\vec{B}$  perpendiculaire au plan de la feuille et la force magnétique  $\vec{F}_m$ . Esquisser la courbure de la trajectoire puis représenter les vecteurs unitaires de la base de coordonnées polaires.

3) Donner l'expression de l'accélération du cation dans la base de coordonnées polaires en fonction de sa vitesse  $v_0$  et du rayon de courbure  $r$  de la trajectoire. Montrer que le rayon de courbure de la trajectoire du cation a pour expression :

$$r = r_L = \frac{v_0}{\omega_C} \text{ appelé rayon de Larmor}$$

avec  $\omega_C$  appelée la pulsation cyclotron, que l'on exprimera en fonction de  $e, B_0$  et  $m$ .

On suppose maintenant que le cation possède une vitesse initiale  $v_0$  parallèle au champ magnétique  $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{u}_z$ .

4) En projetant le principe fondamental de la dynamique selon  $\vec{u}_z$ , montrer que la composante  $v_z$  de la vitesse du cation selon  $\vec{u}_z$  est constante. En déduire que le mouvement est rectiligne. Peut-on affirmer que le cation est confiné ?

5) Pour une vitesse initiale quelconque du cation, le mouvement est une combinaison du mouvement circulaire perpendiculaire au champ magnétique et du mouvement rectiligne parallèle au champ magnétique. Représenter l'allure de la trajectoire du cation.

6) Actuellement, la majorité des recherches sur le confinement magnétique portent sur les tokamaks, pour lesquels les bobines produisant le champ magnétique ne forment pas un cylindre (comme pour le solénoïde) mais un tore (cf figure 2 ci-dessous) qui est un cylindre refermé sur lui-même. Le confinement magnétique du plasma est donc assuré par les bobines toroïdales. Quelle raison a conduit à retenir une géométrie toroïdale ?

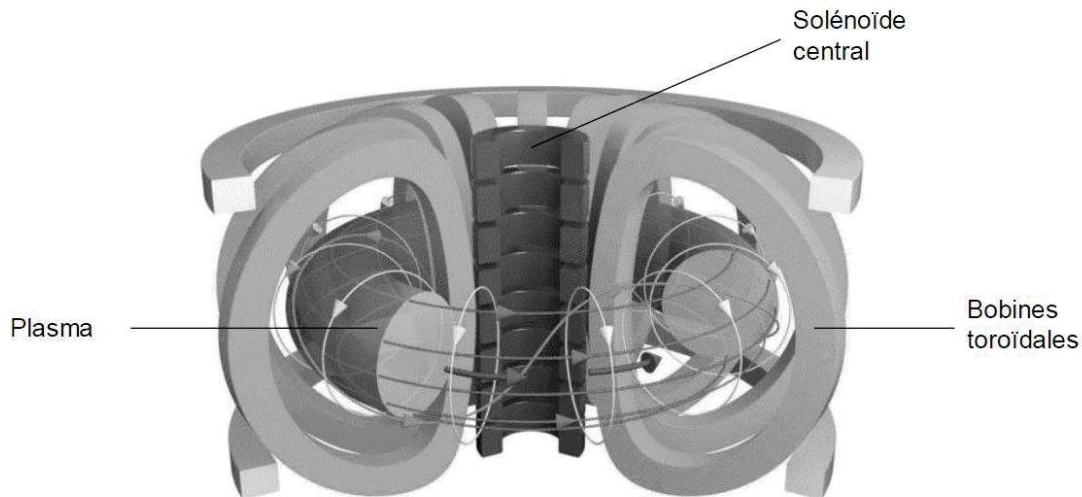


Figure 2 - Schéma d'un tokamak

7) Calculer le rayon de Larmor d'un cation d'hélium  ${}^4_2\text{He}^+$  (masse  $m = 6,6 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ) de vitesse  $v_0 = 3,0 \cdot 10^5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le tokamak d'ITER produisant un champ magnétique  $B_0 = 12 \text{ T}$ . Commenter, sachant que les rayons internes des bobines toroïdales sont de 2,0 m à l'horizontale et de 3,4 m à la verticale.

## II. Bouteille magnétique

Lors des premières recherches sur la fusion contrôlée, il a été envisagé de confiner le plasma à l'aide d'une « bouteille magnétique » qui est un solénoïde dont le rayon des spires diminue lorsqu'on se rapproche de ses bords. L'allure des lignes de champ dans une bouteille magnétique est représentée sur la figure 3.

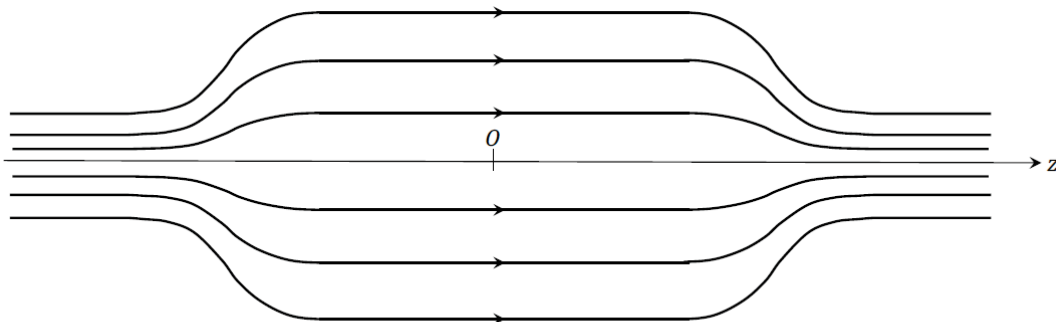


Figure 3 - Lignes de champ d'une bouteille magnétique

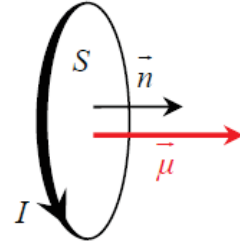
8) Le champ magnétique est à flux conservatif. Ceci implique que si on note  $S$  une surface normale au champ magnétique, le produit  $BS = \text{cte}$ . Comment évolue qualitativement l'intensité du champ magnétique lorsqu'on se rapproche des bords de la bouteille magnétique (c'est-à-dire lorsque  $|z|$  augmente) ? Représenter graphiquement l'allure de la norme du champ magnétique  $B(z)$  sur l'axe  $(Oz)$ .

On s'intéresse au mouvement d'un cation de masse  $m$  dans cette bouteille magnétique autour de l'axe  $(Oz)$ . Son vecteur vitesse est  $\vec{v} = \vec{v}_\perp + \vec{v}_\parallel$  où  $\vec{v}_\perp$  désigne la vitesse dans le plan perpendiculaire à  $\vec{u}_z$  et  $\vec{v}_\parallel$  la vitesse selon  $\vec{u}_z$ .

9) Au voisinage de l'axe  $(Oz)$  le champ magnétique est localement uniforme et orienté selon  $\vec{u}_z$  :  $\vec{B} = B\vec{u}_z$ . On suppose comme dans la question 3) que le mouvement du cation est circulaire, uniforme et de vitesse  $v_\perp$  perpendiculaire au champ magnétique. Le mouvement du cation génère un courant  $I$ . Donner l'expression de ce courant en fonction de la charge du cation  $e$  et de la période  $T$  de rotation du cation.

On définit  $\vec{\mu}$  le moment magnétique du cation défini par  $\vec{\mu} = IS\vec{n}$  avec  $S$  surface de la boucle de courant et  $\vec{n}$  vecteur unitaire normal à la surface  $S$  (cf schéma ci-contre). Montrer que le moment magnétique du cation a pour expression :

$$\vec{\mu} = -\frac{mv_\perp^2}{2B}\vec{u}_z$$



L'expression du moment magnétique établie ci-dessus reste en première approximation valable malgré les déplacements du cation selon l'axe  $(Oz)$ . En outre, on peut montrer que le moment magnétique reste constant au cours du mouvement. Ainsi, le cation peut être assimilé à un dipôle magnétique rigide se déplaçant selon l'axe  $(Oz)$  auquel on associe une énergie potentielle de la forme  $E_p = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ .

10) On donne :  $E = \frac{1}{2}mv_\parallel^2 + E_p = \text{cte}$ . Quelle est la signification physique de  $E$  ?

11) Tracer l'allure de  $E_p(z)$ . Discuter qualitativement les différents mouvements possibles du cation dans la bouteille magnétique en fonction de la valeur de  $E$  (état libre ou état liés). Dans quel cas peut-on dire que la bouteille magnétique se comporte comme un « miroir magnétique », c'est-à-dire que le cation repart dans la direction opposée sur les bords de la bouteille ?

12) Quel défaut présente la bouteille magnétique pour le confinement du plasma ?

## Problème 4 Étude d'une photodiode

Une photodiode, dont le symbole en convention récepteur est donné Figure 1, est un composant électro-optique dont la caractéristique courant-tension (Figure 2) dépend de la puissance lumineuse moyenne reçue au niveau de sa surface sensible.

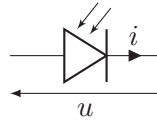


Figure 1 : Symbole d'une photodiode.

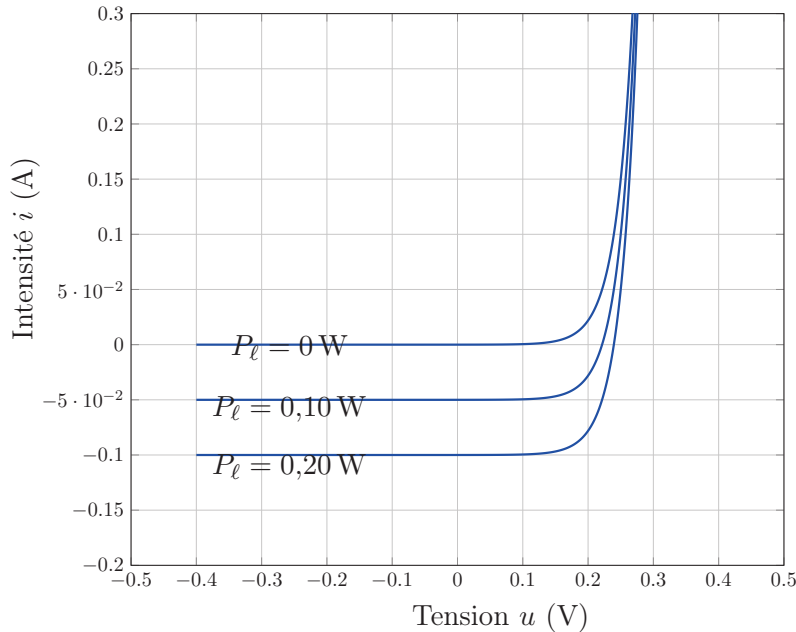


Figure 2 : Caractéristique courant-tension de la photodiode en convention récepteur pour différentes puissances lumineuses  $P_\ell$  reçues.

On remarque que, pour  $u < 0$ , la caractéristique présente un palier d'intensité appelé « photocourant ». L'intensité de ce photocourant est égale à  $-I_\ell$  avec  $I_\ell$  proportionnelle à la puissance lumineuse  $P_\ell$  reçue. On donne la loi

$$I_\ell = kP_\ell$$

où  $k$  est une constante valant  $0,50 \text{ A/W}$ .

### A Caractéristique d'une photodiode

Considérons une photodiode recevant une puissance lumineuse  $P_\ell = 0,20 \text{ W}$ .

**A.1** Déterminer la valeur de l'intensité  $I_\ell$ .

**A.2** Déterminer graphiquement la valeur de la tension  $U_{CO}$  aux bornes de la photodiode lorsque celle-ci est en circuit ouvert.

Afin de simplifier l'analyse, on représente désormais la caractéristique courant-tension d'une photodiode éclairée de façon approchée par deux segments de droite :

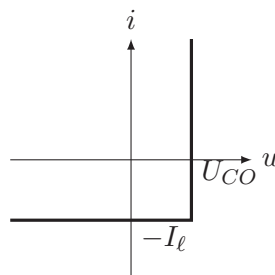


Figure 3 : Caractéristique courant-tension approchée de la photodiode éclairée en convention récepteur pour une puissance lumineuse  $P_\ell > 0$  reçue.



- A.3** Dans quel quadrant du plan  $(u, i)$  la photodiode fonctionne-t-elle comme générateur électrique ?
- A.4** À quelle(s) condition(s) cette photodiode fonctionne-t-elle comme un générateur idéal de courant ? On précisera la valeur du courant électromoteur.
- A.5** De même, à quelle(s) condition(s) cette photodiode fonctionne-t-elle comme un générateur idéal de tension ? On précisera la valeur de la force électromotrice.

## B Utilisation en cellule photovoltaïque

Dans cette partie, on considère la photodiode éclairée avec une puissance lumineuse  $P_\ell = 0,20 \text{ W}$ .

Pour commencer, on place une résistance  $R_L = 10 \Omega$  (dite résistance de charge) aux bornes de la photodiode.

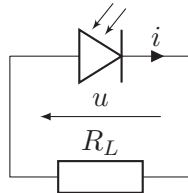


Figure 4 : Schéma du circuit.

- B.1** Quelle est la convention utilisée pour décrire la résistance  $R_L$  ?
- B.2** Déterminer le mode de fonctionnement (générateur idéal de tension ou générateur idéal de courant) de la photodiode dans ce circuit. La réponse devra être justifiée en précisant les valeurs numériques de  $u$  et  $i$ .
- B.3** En déduire la valeur de la puissance électrique  $\mathcal{P}$  cédée par la photodiode à la résistance.
- B.4** Déterminer la valeur de  $R_L$  pour laquelle la puissance fournie par la photodiode est maximale. Calculer la valeur  $\mathcal{P}_{\max}$  de cette puissance maximale.

On constitue maintenant un panneau photovoltaïque, dont le symbole en convention récepteur est donné figure 5, en associant un grand nombre de photodiodes identiques. Pour cela, on met en dérivation 6 branches constituées d'une association série de 36 photodiodes chacune comme indiqué sur la figure 6.

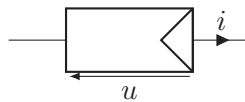


Figure 5 : Symbole d'un panneau photovoltaïque.

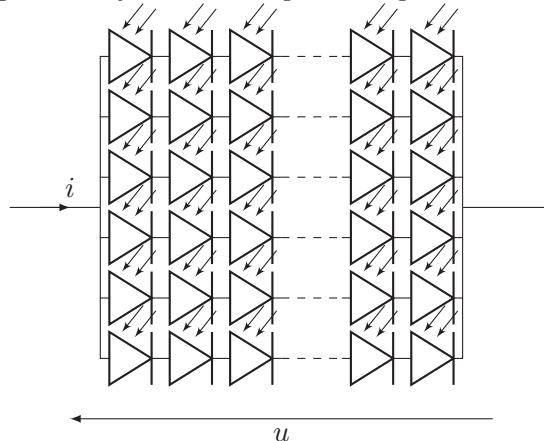


Figure 6 : Schéma électrique d'un panneau photovoltaïque.

- B.5** En utilisant la caractéristique simplifiée d'une photodiode, montrer que la caractéristique de l'ensemble du panneau photovoltaïque a la même allure avec un photocourant d'intensité  $-I_p$  et une tension en circuit ouvert  $U_{CO,p}$ . On précisera les expressions de  $-I_p$  et  $U_{CO,p}$  en fonction de  $I_\ell$  et  $U_{CO}$  ainsi que leurs valeurs numériques.
- B.6** Quelle est la puissance maximale  $\mathcal{P}_{p,\max}$  délivrée par le panneau photovoltaïque ?