

Problème 1 Déplacements sur la Lune

A Caractéristiques du sol lunaire

A.1 Exprimer le module du champ de pesanteur lunaire g_L à la surface de la Lune, en fonction de g_T , m_T , R_T , m_L et R_L .

A.2 Un bon athlète possède sur Terre une détente verticale de 1 m. Quelle serait cette détente sur la Lune ?

Le sol lunaire est accidenté et modélisé par une surface ondulée de période spatiale λ , d'équation $z(x) = A \cos(\frac{2\pi x}{\lambda})$. Un véhicule assimilé à un point matériel M se déplace sur cette surface suivant la loi $x_M(t) = vt$, où v est une constante.

A.3 Montrer que $z_M(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps de pulsation ω . Relier λ , ω et v .

A.4 Déterminer la valeur maximale de A qui assure le maintien du véhicule au sol.

A.5 Application numérique : calculer A_{max} pour $v = 14 \text{ km h}^{-1}$ et $\lambda = 1,0 \text{ m}$. Conclure.

B Rover lunaire

Les astronautes des missions Apollo XV et suivantes ont utilisé pour leurs déplacements un véhicule spécialement adapté : le rover lunaire. Ce véhicule est sommairement modélisé par un point matériel de masse m_R , de position G , reposant sur une roue de centre O de masse négligeable. Le vecteur $\overrightarrow{OG}$ reste toujours vertical (figure 1).

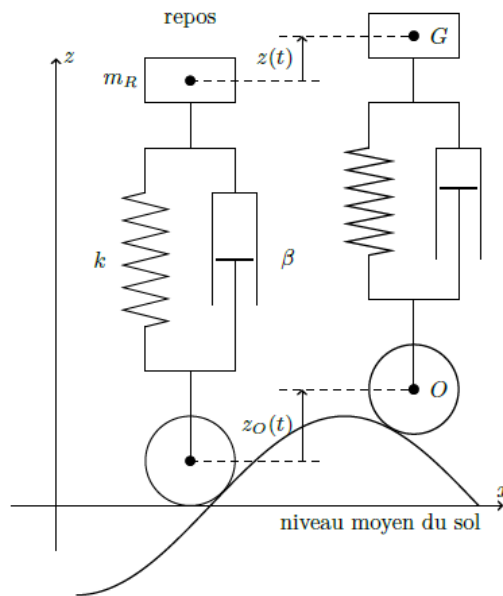


FIGURE 1 – Rover lunaire

Les positions de G et du centre de la roue par rapport à la position de repos sont notées respectivement $z(t) = z_G(t)$ et $z_O(t)$. Le véhicule est relié à la roue par une suspension modélisée par un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 et un amortisseur fluide de constante d'amortissement β . La force exercée sur la masse m_R est donnée par

$$\vec{F}_f = -\beta \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz_O}{dt} \right) \vec{u}_z$$

B.1 Préciser l'allongement $\Delta \ell$ du ressort au repos.

La roue restant en contact avec le sol, $z_O(t) = A \cos(\omega t)$.

B.2 En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse m_R , montrer que $z(t)$ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{z} + \omega_1 \dot{z} + \omega_0^2 z = f(t)$$

en précisant les valeurs de ω_0 , ω_1 et de la fonction $f(t)$ en fonction des données.

B.3 Montrer que l'amplitude complexe du mouvement du point G est donnée en régime sinusoïdal forcé par :

$$\underline{H} = \frac{\underline{z}}{\underline{z}_O} = \frac{1+j\frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2}}{1+j\frac{\omega\omega_1}{\omega_0^2}-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

B.4 Montrer que pour k suffisamment faible, $\underline{H}$ se réduit à la fonction de transfert d'un filtre passe bas du premier ordre, dont on exprimera la pulsation de coupure ω_c en fonction de β et m_R .

L'amplitude du mouvement vertical de G doit être limitée à environ le dixième de celle de O , pour $v = 14 \text{ km h}^{-1}$, $\lambda = 1,0 \text{ m}$ et $m_R = 7,0 \times 10^2 \text{ kg}$.

B.5 Proposer une valeur pour β .

B.6 Proposer une valeur pour k .

B.7 Quel serait le comportement de ce véhicule sur un terrain de même nature, à la surface de la Terre ?

Problème 2 Pourquoi le ciel est-il bleu ?

La couleur du ciel a longtemps constitué une source d'interrogation. Dans ce problème, on l'interprète comme étant due à la diffusion sélective des ondes issues du Soleil par les atomes présents dans l'atmosphère.

On adopte le modèle de Thomson de l'atome, dans lequel le noyau est modélisé par une charge ponctuelle placée en O et l'électron situé en M , de masse m et de charge $-e$, est lié élastiquement au noyau par une force du type : $\vec{T} = -k\vec{OM}$ où k s'interprète comme une constante de raideur. On suppose que le noyau placé en O est fixe dans le référentiel d'étude R supposé galiléen. Dans ce modèle l'électron est de plus soumis à une force de frottement du type $\vec{f} = -h\vec{v}$ où h est une constante positive et $\vec{v}$ la vitesse instantanée de l'électron. On considère une radiation monochromatique issue du Soleil, produisant au niveau de l'atome un champ électrique $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \vec{u}_x$. On rappelle que l'électron est alors soumis à une force électrique du type $\vec{F}_e = (-e)\vec{E}$. Le poids de l'électron et la force d'origine magnétique sont négligées devant les autres forces. On suppose que le mouvement de l'électron est unidimensionnel suivant l'axe (Ox) et on pose $x(t)$ son abscisse mesuré par rapport au noyau.

Données : $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$, $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$, $k = 1,0 \times 10^2 \text{ N m}^{-1}$, $h = 1,0 \times 10^{-20} \text{ kg s}^{-1}$.

1. Établir les équations différentielles vérifiées par y et z .
2. Montrer qu'en régime permanent l'électron oscille uniquement suivant l'axe (Ox) .
3. Montrer que l'abscisse x de l'électron vérifie une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = F(t)$$

où ω_0 , Q et $F(t)$ sont à exprimer en fonction des données. Calculer ω_0 et Q . On suppose que $x(t)$ s'écrit sous la forme : $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$

4. Exprimer l'amplitude X des oscillations de l'électron en fonction de ω_0 , Q , e , E_0 et m .
5. Le rayonnement visible provenant du Soleil est compris dans la gamme des longueurs d'onde allant de $\lambda_b = 400 \text{ nm}$ (couleur bleue) à $\lambda_r = 800 \text{ nm}$ (couleur rouge). Calculer les pulsations ω_b et ω_r correspondant aux radiations bleue et rouge. Donnée : célérité de la lumière : $c = 3,0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
6. Montrer que le vecteur $\vec{OM}$ de l'électron s'écrit approximativement :

$$\vec{OM}(t) \approx \frac{-e}{m\omega_0^2} E_0 \cos \omega t \vec{u}_x$$

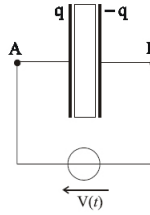
7. Sachant que l'électron diffuse un rayonnement dont la puissance P est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de son accélération, exprimer en fonction des longueurs d'onde λ_b et λ_r le rapport $\frac{P_b}{P_r}$ des puissances diffusées dans le bleu et le rouge. Faire l'application numérique et conclure.

Problème 3 Étude d'une montre à quartz

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique). Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Ainsi, le quartz est très intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps. Actuellement, le quartz est remplacé par certaines céramiques piézo-électriques.

A Modèles mécanique et électrique du résonateur à quartz

Un cristal de quartz est taillé sous forme de pastille cylindrique mince. La base circulaire présente un diamètre $d = 1,0 \text{ cm}$ et l'épaisseur de la pastille est $e = 0,20 \text{ mm}$. Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chacune des faces circulaires du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées). On parle d'électrodes de connexion. On a ainsi réalisé un condensateur plan.



D'un point de vue mécanique, lorsque l'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale $V(t) = V \cos(\omega t)$, il va être, dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension.

Modélisation proposée : un élément de masse m du corps piézo-électrique, placé à une distance x de son point de repos, est soumis aux forces suivantes, toutes orientées selon un axe (Ox) que l'on ne précise pas ici :

- une force de rappel type élastique $-kx$ ($k > 0$) qui a pour origine la rigidité du matériau,
- des frottements supposés proportionnels à la vitesse et de la forme $-h \frac{dx}{dt}$ ($h > 0$),
- une force due à l'effet piézo-électrique $\beta V(t)$ ($\beta > 0$),
- le poids est négligé.

A.1 En appliquant le principe fondamental de la dynamique au petit élément de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$ en supposant que le mouvement se fasse selon l'axe (Ox) .

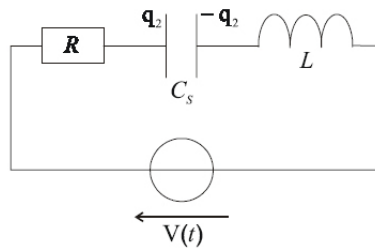
D'un point de vue électrique, la charge totale q apparaissant sur les électrodes planes a deux origines :

- les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité C_P , d'où une charge $q_1(t)$,
- l'effet piézo-électrique provoque l'apparition d'une charge q_2 proportionnelle à x : $q_2(t) = \gamma x(t)$.

A.2 On admet que la capacité d'un condensateur plan vaut $C_P = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$ où S est la surface d'une électrode, e l'épaisseur du condensateur, ε_0 la permittivité du vide (sa valeur est $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$) et ε_r une constante valant pour le quartz $\varepsilon_r = 2,3$. Estimer alors la capacité C_P appelée capacité de connexion. Quelle est la relation entre la charge q_1 , la capacité C_P et la tension $V(t)$?

A.3 En reprenant l'équation différentielle obtenue pour $x(t)$, écrire l'équation différentielle vérifiée par la charge $q_2(t)$.

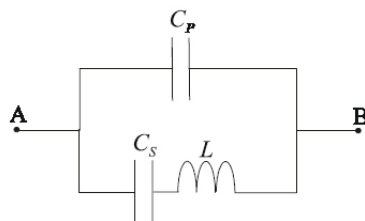
A.4 On considère le circuit représenté sur la figure ci-dessous :



Montrer que la charge $q_2(t)$ est équivalente à la charge d'un condensateur de capacité C_S dans le circuit série R, L, C_S dont la tension aux bornes est $V(t)$. On donnera alors les expressions de R, L et C_S en fonction de m, h, β, γ et k .

B Étude de l'impédance équivalente du quartz

Dans cette partie, on néglige la résistance R du quartz. Le schéma électrique simplifié est alors donné sur la figure ci dessous.



Pour les applications numériques, on prendra $L = 500 \text{ mH}$, $C_S = 80,0 \times 10^{-15} \text{ F}$ et $C_P = 7,99 \text{ pF}$. On se placera toujours en régime sinusoïdal forcé (les grandeurs dépendront de la pulsation ω).

B.1 Calculer alors l'impédance complexe du quartz, vue entre les bornes A et B. On l'écrira sous la forme :

$$\underline{Z}_{AB} = \left(-\frac{j}{\alpha\omega}\right) \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_a^2}}$$

où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2 = -1$. On donnera en fonction de L , C_P et C_S les expressions de α , ω_a^2 et ω_r^2 . Montrer aussi que $\omega_a^2 > \omega_r^2$.

B.2 Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r correspondant respectivement aux pulsations ω_a et ω_r .

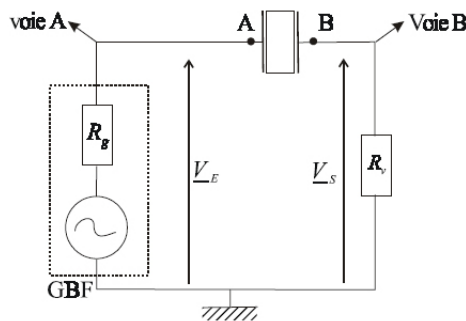
B.3 Étudier le comportement inductif ou capacitif du quartz en fonction de la fréquence. On rappelle qu'un dipôle a un comportement inductif (respectivement capacitif) si la partie imaginaire de son impédance est positive (respectivement négative).

B.4 Tracer l'allure de $Z_{AB} = ||\underline{Z}_{AB}||$, module de l'impédance complexe du quartz en fonction de la fréquence.

C Étude expérimentale de la résonance d'un quartz

On veut tracer expérimentalement la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un générateur basses fréquences pouvant délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne R_g . On dispose d'une résistance R_v variable, d'un quartz et d'un oscilloscope.

Dans cette question, on néglige toujours la résistance du quartz sauf dans la question C.3 On réalise alors le montage de la figure suivante :



C.1 Calculer le rapport de la tension de sortie $\underline{V}_s$, à celle d'entrée $\underline{V}_e$: $\underline{H} = \frac{\underline{V}_s}{\underline{V}_e}$ en fonction de R_v et de $\underline{Z}_{AB}$

C.2 On choisit, pour chaque fréquence la résistance R_v de telle façon que $||\underline{H}|| = \frac{1}{2}$. Que vaut alors le module de l'impédance du quartz en fonction de R_v ?

C.3 Autour du pic de résonance d'intensité situé vers 796 kHz, on mesure une bande passante de 50,0 Hz. Quelle est la valeur numérique du facteur de qualité Q du quartz défini comme le rapport de la fréquence de résonance à la largeur de la bande passante ? Commenter cette valeur. En supposant que le facteur de qualité soit donné par la relation $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ (ω_0 étant la pulsation de résonance), estimer la valeur de la résistance R du quartz.

D Principe d'un montre à quartz

Une horloge est composée d'un oscillateur plus ou moins stable dans le temps et d'un système de comptage des oscillations. Le quartz utilisé présente une fréquence de résonance de 32 768 Hz. Cela signifie que 32768 fois par seconde une impulsion électrique est émise par le circuit oscillant. Un dispositif électrique doit compter les impulsions. Ces compteurs fonctionnent dans la technologie binaire (suite de 0 et de 1). Une impulsion électrique correspond à la valeur 1. La valeur 0 correspond à aucun signal électrique.

D.1 Compteur modulo 2 Un tel compteur délivre une impulsion de sortie dès qu'il a compté 2 impulsions à son entrée. Si en entrée d'un tel compteur on envoie le signal à 32 768 Hz délivré par le circuit à quartz, quelle est la fréquence du signal de sortie du compteur modulo 2 ?

D.2 Succession de compteurs modulo 2 Écrire le nombre 32768 sous la forme 2^k où k est un entier naturel. Combien de compteurs modulo 2 faut-il alors mettre en cascade pour commander le chiffre des secondes ?

Problème 4 Identifier un signal de sortie avec la fonction de transfert

On considère un système physique linéaire permettant, à partir d'un signal d'entrée $e(t) = E_m \cos(\omega t)$, de générer un signal de sortie $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$.

La relation entre les grandeurs d'entrée et de sortie est donnée par la fonction de transfert complexe :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{3}{2 + 5j \frac{\omega}{\omega_0}} \text{ avec } \omega_0 = 5,0 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}.$$

1. Déterminer l'expression de S_m et φ en fonction de E_m , ω , ω_0 .
Avec $E_m = 1,0 \text{ V}$, calculer numériquement S_m et φ pour $\omega = 1,0 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}$, $\omega = 1,0 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$ et $\omega = 1,0 \times 10^4 \text{ rad s}^{-1}$. Commenter.
2. En terme de filtrage, quelle est la fonction réalisée par la fonction de transfert $\underline{H}$? La mettre sous la forme canonique suivante : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j \frac{f}{f_c}}$ et identifier les expressions de H_0 et f_c . Calculer numériquement f_c .
3. On considère que $e(t)$ est la somme de deux signaux sinusoïdaux, de pulsation ω et de pulsation 2ω : $e(t) = E_m \cos(\omega t) + 2E_m \cos(2\omega t + \pi/4)$. Prévoir l'expression du signal de sortie $s(t)$. Faire les applications numériques en prenant $\omega = 1,0 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$ et $E_m = 1,0 \text{ V}$, puis représenter sur un même graphe les spectres fréquentiels de $s(t)$ et $e(t)$. Commenter.