

Exercice 4 Étude du filtre d'une alimentation à découpage ☼●

1. En basse fréquence le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. On a alors $\underline{u}_s = \underline{u}_e$. La tension $\underline{u}_s$ est aux bornes d'un condensateur qui se comporte comme un fil en basse fréquence d'où $\underline{u}_s = 0$
2. L'impédance de la résistance en parallèle du condensateur s'écrit $\underline{Z} = \frac{R}{1+jRC\omega}$. En appliquant le diviseur de tension on a $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\underline{Z}}{jL\omega + \underline{Z}} = \frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega + LC(j\omega)^2}$. On obtient alors la fonction de transfert demandée $\underline{H}(jf) = \frac{1}{1+j\frac{f}{Qf_0} - \frac{f^2}{f_0^2}}$ où $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}$. Application numérique $f_0 = 1,1 \cdot 10^2$ Hz.
3. $|\underline{H}(jf_0)| = Q$ On résout alors $20 \log Q = -3$ dB, soit $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Puis $R = 2Q\sqrt{\frac{L}{C}} = 1,0 \cdot 10^2 \Omega$.
4. Le spectre du signal d'entrée est constituée d'une composante continue d'amplitude $\langle V_e(t) \rangle = V_0 \frac{T_f}{T} = \alpha V_0$, d'un fondamental de fréquence égal à $f_1 = 1$ kHz et d'harmoniques de fréquences $f_n = nf_1$ avec n un entier. Le filtre passe bas étudié a une fréquence de coupure inférieure d'une décade au fondamental. L'ordre de grandeur de l'atténuation sera alors de 40 dB pour le fondamental et davantage pour les harmoniques. Par conséquent il ne restera en sortie du filtre que la composante continue $\langle V_e(t) \rangle = \alpha V_0$ et une petite partie du fondamental qui explique la tension de sortie « sensiblement » constante.

Exercice 6 Dérivateur

1. Déterminons les différentes fonctions de transfert.
 - Montage (a) : on introduit le courant d'intensité i circulant de l'entrée vers la sortie du montage, qui traverse la capacité et la résistance. L'ALI fonctionnant en régime linéaire, $\underline{V}_+ = 0 = \underline{V}_-$. En appliquant la loi des mailles, nous obtenons : $\underline{V}_s + R\underline{i} = 0$ et $\underline{V}_e = \frac{\underline{i}}{jC\omega}$. Nous en déduisons : $\underline{V}_s = -RjC\omega \underline{V}_e$, d'où $\underline{H}_1(\omega) = -RjC\omega$. En revenant aux signaux réels, ceci se traduit par : $V_s(t) = -RC \frac{dV_e(t)}{dt}$: le montage (a) réalise donc l'opération dérivation du signal d'entrée.
 - En reprenant les mêmes notations que ci-dessus et en utilisant la loi des mailles, nous aboutissons à : $\underline{V}_s + R\underline{i} = 0$ et $\underline{V}_e = \frac{\underline{i}}{jC\omega} + R'\underline{i}$. Soit : $\underline{V}_s = -\frac{RjC\omega}{1 + R'jC\omega} \underline{V}_e$, et $\underline{H}_2(\omega) = -\frac{RjC\omega}{1 + R'jC\omega}$.
2. Nous pouvons réécrire $\underline{H}_2$ sous la forme suivante : $\underline{H}_2(\omega) = -\frac{R}{R'} \frac{R'jC\omega}{1 + R'jC\omega}$. Pour de très grandes pulsations, $\underline{H}_2(\omega) \approx -\frac{R}{R'}$ et pour de très faibles pulsations, $\underline{H}_2(\omega) \approx -RjC\omega$ qui tendra vers zéro. On reconnaît ainsi les caractéristiques d'un filtre passe-haut d'ordre 1.

La pulsation de coupure à -3 dB que l'on note ω_c est telle que $|\underline{H}_2(\omega_c)| = \frac{|\underline{H}_2|_{\max}}{\sqrt{2}}$ avec $|\underline{H}_2|_{\max} = \frac{R}{R'}$. On aboutit après calcul à $\omega_c = \frac{1}{R'C} = 6,2 \times 10^2 \text{ rad s}^{-1}$.

Le montage (b) sera dérivateur (avec la même opération de dérivation que le montage (a)) lorsque $\omega \ll \omega_c$.
3. Commentons les oscillogrammes (a) et (b).
 - Oscillogramme (a) : en appliquant le principe de superposition, $V_s(t) = -RC \frac{dV_e}{dt}$ car les deux signaux sont dérivés. On aboutit à $V_s(t) = RCE\omega_0 \sin(\omega_0 t) + RCB\omega_1 \sin(\omega_1 t)$, soit à la superposition de deux signaux en sinus, en quadrature de phase avec $V_e(t)$ comme le montre le graphe. L'amplitude du signal basse fréquence est $RCE\omega_0 = 0,1$ V, ce qui correspond bien à l'amplitude de 5 V pour 50 V_s mesurée sur l'oscillogramme. À ce signal basse fréquence se superpose le bruit haute fréquence à la pulsation ω_1 , dont l'amplitude est $RCB\omega_1 = 0,025$ V, ce qui multiplié par 50 est compatible avec l'amplitude du bruit mesurée sur l'oscillogramme.

- Oscillogramme (b) : le signal basse fréquence est intégré, mais le signal haute fréquence est simplement multiplié par $-R/R'$ d'où le signal de sortie : $V_s(t) = RCE\omega_0 \sin(\omega_0 t) - \frac{R}{R'}B \cos(\omega_1 t)$. L'amplitude du signal basse fréquence est ainsi la même que précédemment, mais l'amplitude du signal haute fréquence est $\frac{R}{R'}B = 0,0050 \text{ V}$, ce qui multiplié par 50 donne $0,25 \text{ V}$, compatible avec l'amplitude du bruit mesurée sur l'oscillogramme.

Exercice 7 Filtre de Colpitts

1. En basses fréquences la bobine se comporte comme un fil ce qui court-circuite l'entrée. La tension de sortie n'a donc pas de lien avec la tension d'entrée et le filtre est opaque pour les basses fréquences (attention : la tension aux bornes d'un circuit ouvert n'est pas nulle!).

En hautes fréquences les condensateurs se comportent comme des fils ce qui implique que la tension de sortie du filtre est nulle.

Le filtre étudié est opaque en basses et en hautes fréquences, il se comporte comme un filtre passe-bande.

2. Soit $\underline{u}_L$ la tension aux bornes de la bobine. D'après la formule du diviseur de tension, on a $\underline{u}_s = \frac{\frac{1}{3jC\omega}}{\frac{1}{3jC\omega} + \frac{1}{jC\omega}} \underline{u}_L = \frac{1}{4} \underline{u}_L$. L'impédance équivalente des deux condensateurs en série s'écrit $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} + \frac{1}{3jC\omega} = \frac{4}{j3C\omega}$ et l'impédance équivalente de la bobine en parallèle des deux condensateurs s'écrit $\underline{Z}_{eq} = \frac{4jL\omega}{4+3LC(j\omega)^2}$. La relation du pont diviseur de tension permet d'obtenir une relation entre $\underline{u}_L$ et $\underline{u}_e$: $\frac{\underline{u}_L}{\underline{u}_e} = \frac{4jL\omega}{R(4+3LC(j\omega)^2)+4jL\omega}$, puis on obtient la fonction de transfert à partir de la relation entre $\underline{u}_L$ et $\underline{u}_s$. $\underline{H} = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{jL\omega}{R(4+3LC(j\omega)^2)+4jL\omega}$. On met cette expression sous une forme canonique puis on identifie les expressions de A , Q et ω_0 à partir de l'expression : $\underline{H} = \frac{Aj\frac{\omega}{Q\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{Q\omega_0}+(j\frac{\omega}{\omega_0})^2}$. On obtient alors $\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}$, $Q = \frac{R\sqrt{3C}}{2\sqrt{L}}$ et $A = \frac{1}{4}$.
3. Le gain maximum correspond à $G_{dBmax} = 20 \log\left(\frac{1}{4}\right) = -12 \text{ dB}$, ce qui correspond au diagramme en pointillé sur le graphique.

En très basses fréquences, la fonction de transfert est équivalente à $\underline{H} \sim \frac{j\omega A}{Q\omega_0}$, soit une asymptote dans le diagramme de Bode : $G_{dB0} = 20 \log \omega + 20 \log \frac{A}{Q\omega_0}$.

En très haute fréquences $\underline{H} \sim \frac{A\omega_0}{Qj\omega}$, soit une asymptote dans le diagramme de Bode : $G_{dB\infty} = -20 \log \omega + 20 \log \frac{A\omega_0}{Q}$.

On peut ainsi vérifier que l'intersection des asymptotes à $\pm 6 \text{ dB}$ par octave (les asymptotes à $\pm 20 \text{ dB}$ ne sont pas visibles sur une décade) se fait pour la fréquence $f_0 = 1 \text{ kHz}$ à un gain $20 \log \frac{A}{Q} = -32 \text{ dB}$.

Les fréquences de coupures correspondent à des gains de $(-12-3 = -15 \text{ dB})$, graphiquement, on obtient $f_{c1} = 9,5 \times 10^2 \text{ Hz}$ et $f_{c2} = 1,05 \times 10^3 \text{ Hz}$ soit $\Delta f = 1,0 \times 10^2 \text{ Hz}$, et on retrouve ainsi, $Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 10$.