

Problème 1: Principe de la séparation isotopique par effusion gazeuse

1) Vitesse quadratique moyenne d'une molécule de masse molaire M à la température T :

$$u = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}}$$

2) Le nombre $dN_{1 \rightarrow 2}$ de molécules du compartiment (1) traversant la surface S vers le compartiment (2) pendant une durée dt est : $dN_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{6} \frac{N_1(t)}{V} u \cdot S \cdot dt$. De la même manière, on peut dire que le nombre $dN_{2 \rightarrow 1}$ de molécules du compartiment (2) traversant la surface S vers le compartiment (1) pendant la même durée dt est : $dN_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{6} \frac{N_2(t)}{V} u \cdot S \cdot dt$. Soit :

$$\begin{aligned} \frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt} &= \frac{1}{6} \frac{N_1(t)}{V} u S \\ \frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt} &= \frac{1}{6} \frac{N_2(t)}{V} u S \end{aligned}$$

3) Soit $\frac{dN_1}{dt}$ la variation du nombre de molécules dans le compartiment (1) par unité de temps :

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt} - \frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt}$$

En explicitant :

$$\frac{dN_1}{dt} = \frac{1}{6} \frac{N_2(t)}{V} u S - \frac{1}{6} \frac{N_1(t)}{V} u S$$

Sachant qu'à l'origine des temps le compartiment (1) contient N molécules d'un gaz parfait alors que le compartiment (2) est vide : $N_1(t) + N_2(t) = N$, on établit l'équation différentielle :

$$\frac{dN_1}{dt} + \frac{Su}{3V} N_1 = \frac{Su}{6V} N$$

4) Posons $\tau = \frac{3 \cdot V}{S \cdot u}$ temps caractéristique du phénomène d'effusion, la solution de cette équation différentielle est du type : $N_1(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{N}{2}$ Sachant qu'à l'origine des temps : $N_1(0) = N$ et que $N_1(t) + N_2(t) = N$ on établit que :

$$\begin{aligned} N_1(t) &= \frac{N}{2} \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \\ N_2(t) &= \frac{N}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \end{aligned}$$

On vérifie que $N_1(t)$ et $N_2(t)$ satisfont les conditions initiales et que pour $t \gg \tau$: $N_1(t) = N_2(t) = \frac{N}{2}$

5) A.N. : Avec $u = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = 169 \text{ m.s}^{-1}$ et $S = \pi r^2 = 3,14 \cdot 10^{-16} \text{ m}^2$, $\tau = \frac{3 \cdot V}{S \cdot u} = 1,81 \cdot 10^{12} \text{ s}$. On constate que τ est très grand (mais il est relatif à un pore...).

6) Par définition, le nombre de particules qui traversent S par unité de temps (de (1) vers (2) et de (2) vers (1)) est :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN_{1 \rightarrow 2}}{dt} + \frac{dN_{2 \rightarrow 1}}{dt}$$

En explicitant :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{6} \frac{N_1(t)}{V} uS + \frac{1}{6} \frac{N_2(t)}{V} uS = \frac{1}{6} \frac{N}{V} uS = \frac{1}{6} n^* uS dt$$

avec $N_1(t) + N_2(t) = N$ et $n^* = \frac{N}{V}$

Pendant un intervalle de temps $\Delta t = 1 \text{ s}$, le flux de particules est donc :

$$\phi = \frac{1}{6} n^* S \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \text{avec} \quad u = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

7) Rapport des temps d'effusion :

$$\frac{\tau_8}{\tau_5} = \sqrt{\frac{M_8}{M_5}} = 1,004$$

8) Compte tenu du fait que $\tau_8 > \tau_5$ si on place un mélange de $U^{235}F_6$ et $U^{238}F_6$ dans (1), on récupère un mélange enrichi en $U^{235}F_6$ dans (2) après un temps de l'ordre de quelques τ .

9) En explicitant ϕ_5 et ϕ_8 on établit que :

$$R_d = \frac{\phi_5}{\phi_8} = \frac{n_5^*}{n_8^*} \sqrt{\frac{M_8}{M_5}}$$

Sachant que $R_0 = \frac{n_5^*}{n_8^*}$ et $\eta_e = \frac{R_d}{R_0}$:

$$\eta_e = \sqrt{\frac{M_8}{M_5}} = \frac{\tau_8}{\tau_5} = 1,004$$

10) Posons : $0,71 \cdot 10^{-2} \cdot (\eta_e)^p = 0,04$:

$$p = \frac{\ln\left(\frac{4}{0,71}\right)}{\ln(\eta_e)} = 404$$

Problème 2 : Principe d'un sismographe

Oscillations libres

1. Le solide S est soumis à son poids et à la force de rappel $\vec{F}_R$ exercée par le ressort, qui est donnée par $\vec{F}_R = -k(l - l_0)\vec{u}_x$ avec l , la longueur du ressort et $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire de Ox .

La condition d'équilibre de S dans le référentiel terrestre ($\mathcal{R}$) galiléen s'écrit donc, en projection sur Ox :

$$-k(l_e - l_0) + mg = 0$$

La longueur du ressort à l'équilibre est donc : $l_e = l_0 + \frac{mg}{k}$.

2.1. La 2ème loi de Newton appliquée à S dans ($\mathcal{R}$) donne : $m\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = m\vec{g} + \vec{F}_R + \vec{F}_f$. On obtient en projection sur Ox : $m\ddot{x} = mg - k(l_e - l_0 + x) - h\dot{x} = -kx - h\dot{x}$, c'est à dire $m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = 0$.

Cette équation différentielle se met sous la forme canonique $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ en posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et

$\frac{h}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$. Le facteur de qualité de l'oscillateur est donc $Q = \frac{m\omega_0}{h} = \frac{\sqrt{mk}}{h}$.

2.2. D'après les données $\omega_0 = 8,9 \text{ s}^{-1}$.

La période propre des oscillations non amorties vaut alors: $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,71 \text{ s}$.

3.1. L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle a pour discriminant $\Delta = \omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$.

Dans le cas d'un régime pseudo-sinusoïdal ($\Delta < 0$), cette équation admet les solutions complexes $-\lambda \pm i\Omega$,

avec $\lambda = \frac{\omega_0}{2Q}$ et $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

3.2. Sur l'enregistrement on mesure pour quatre pseudopériodes une durée $4T = 2,85 \text{ s}$. On obtient donc $T = 0,71 \text{ s}$.

A la précision des calculs, cette valeur est identique à la valeur de la période propre T_0 calculée question 2.2.

L'oscillateur est faiblement amorti et on a donc $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$. La pseudopériode T se confond alors avec la période propre T_0 de l'oscillateur non amorti.

4.1. La fonction $\cos(\Omega t + \psi)$ étant de période T , on a : $\frac{x(t)}{x(t+nT)} = \frac{e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda(t+nT)}} = e^{n\lambda T}$.

D'où le décrément logarithmique : $\delta = \lambda T = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{\pi}{\sqrt{Q^2 - 1/4}}$.

Si $Q \gg 1$, dans le cas d'un oscillateur très faiblement amorti, cette dernière relation peut se simplifier en

$$\delta = \frac{\pi}{Q}.$$

4.2. Le rapport du premier et du quatrième maximum de l'enregistrement donne $3\delta = \ln 5$, soit $\delta = 0,54$.

D'après la question précédente, on en tire $Q = 5,8$.

Le coefficient h est alors donné par $h = \frac{\sqrt{mk}}{Q} = 18 \text{ kg.s}^{-1}$.

5.1. Si l'on veut régler l'amortissement à sa valeur critique, on doit réaliser $Q = \frac{1}{2}$.

On a alors $h = 2\sqrt{mk}$. Numériquement on obtient: $h = 2,1.10^2 \text{ kg.s}^{-1}$.

5.2. Le régime critique est celui pour lequel le régime transitoire est le plus court. Le réglage de l'amortissement à sa valeur critique permet donc une stabilisation rapide du système à sa position d'équilibre.

Oscillations forcées

6.1. On a $\overline{A_0 M} = \overline{A_0 A} + \overline{AM}$. Par définition du déplacement x , ce vecteur s'écrit donc: $\overline{A_0 M} = (l_e + x + y)\overline{u_x}$.

Le vecteur accélération de S dans $(\mathcal{R})$ est donc: $\overline{a_{S/\mathcal{R}}} = (\ddot{x} + \ddot{y})\overline{u_x}$.

6.2. Le bilan des forces est inchangé par rapport à celui de la question 1. La 2ème loi de Newton appliquée à S dans $(\mathcal{R})$ donne donc maintenant, en projection sur Ox : $m(\ddot{x} + \ddot{y}) = -kx - h\dot{x}$, c'est à dire:

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + kx = -m\ddot{y}.$$

Sous forme canonique, on obtient donc l'équation demandée: $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = -\ddot{y}$.

7.1. En formalisme complexe l'équation différentielle précédente devient: $\left(-\omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q} + \omega_0^2\right)x(t) = \omega^2 y(t)$.

La fonction de transfert du sismographe est alors: $\underline{H} = \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}}$.

7.2. En posant $\theta = \frac{\omega}{\omega_0}$, la fonction de transfert s'écrit: $\underline{H} = \frac{\theta^2}{1 - \theta^2 + j\frac{\theta}{Q}}$.

On a $\frac{X_0}{Y_0} = |\underline{H}|$. Il vient donc: $\frac{X_0}{Y_0} = \frac{\theta^2}{\sqrt{(1 - \theta^2)^2 + \frac{\theta^2}{Q^2}}}$.

7.3. Posons $u = 1/\theta$ dans l'expression de $H(\theta)$ établie précédemment :

$$H(u) = \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}}}$$

Rq. : on reconnaît la fonction de transfert d'un circuit (R, L, C) série avec sortie aux bornes de C , mais avec $u = \omega_0/\omega$ l'inverse de la pulsation réduite.

La fonction $H(u)$ admet un maximum pour : $\frac{dH(u)}{du} = 0$

Posons $H(u) = \frac{1}{\sqrt{f(u)}}$, la fonction $H(u)$ admet un maximum pour :

$$\frac{df(u)}{du} = 0 \quad \text{avec} \quad f(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$$

En explicitant :

$$\frac{df(u)}{du} = -4u + \frac{2u}{Q^2} + 4u^3 = 4u\left(u^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2}\right)$$

$H(u)$ est maximal pour :

$$u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \quad \text{ssi} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$$

Soit :

$$\theta_r = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad \text{ssi} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$$

7.4. A la résonance, en explicitant u_r on établit que :

$$H_{max} = H(u_r) = \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Avec $\theta_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$ et $\omega_r = 2\pi f_r$ on établit l'expression de la fréquence de résonance :

$$f_r = \frac{f_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \quad \text{ssi} \quad Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$$

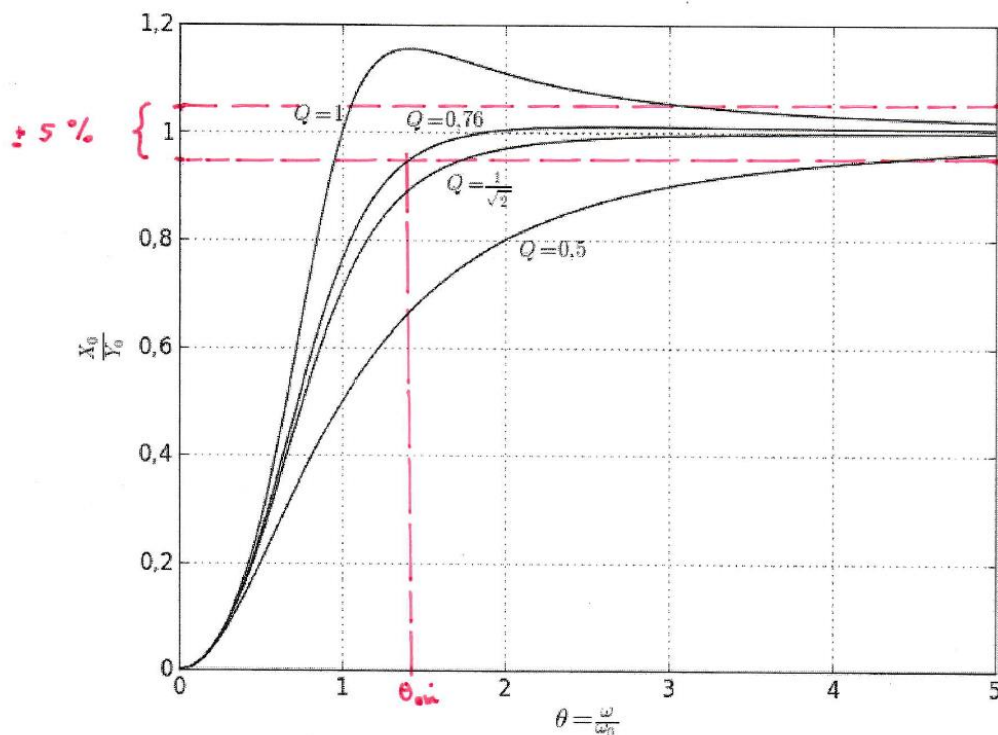
8.1. Sur la figure 8, on vérifie qu'à basse fréquence $H(\theta) \rightarrow 0$ et qu'à haute fréquence $H(\theta) \rightarrow 1$. On vérifie également que $H(\theta)$ admet un maximum pour $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,71$.

Pour $Q = 1$, on calcule $H_{max} = 1,15$ et $\theta_r = 1,41$ ce qui est en accord avec la figure proposée.

8.2. Pour que l'amplitude X_0 des oscillations de S reproduise fidèlement l'amplitude des vibrations du boîtier, on doit avoir $X_0/Y_0 \rightarrow 1$, il faut donc que la pulsation ω des vibrations enregistrées soit très supérieure à la pulsation propre du sismographe. Il n'est pas souhaitable que le sismographe présente un phénomène de résonance afin que le domaine de pulsation où X_0/Y_0 est proche de 1 soit le plus large possible.

8.3. Graphiquement, le facteur de qualité pour lequel X_0/Y_0 présente un écart relatif inférieur ou égal à 5 % sur la bande la plus large de pulsation est $Q = 0,76$.

Pour ce facteur de qualité, on mesure une pulsation réduite minimale $\theta_{min} = 1,4$ soit $f_{min} = 1,4 \cdot f_0$. Sachant que $T_0 = 0,71$ s, $f_{min} = 2,0$ Hz.



Problème 3: Trains à sustentation électromagnétique

A. Capteur à entrefer variable « push-pull »

1) Sachant que pour $x \ll 1$: $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + 0 \cdot (x^2)$ posons :

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_c^2 S}{2(\delta - \Delta z)} = \frac{\mu_0 N_c^2 S}{2\delta \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)} = \frac{\mu_0 N_c^2 S}{2\delta} \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)^{-1}$$

avec $\frac{\Delta z}{\delta} \ll 1$ et $L_e = \frac{\mu_0 N_c^2 S}{2\delta}$ on établit que :

$$L_1 = L_e \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta}\right)$$

De la même manière, on établit que :

$$L_2 = L_e \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta}\right)$$

B. Mesure des variations d'inductance

1) En reconnaissant un diviseur de tension en régime sinusoïdal forcé :

$$\underline{u}_1 = \frac{jL_1 \omega \underline{e}}{R + jL_1 \omega + jL_2 \omega} \quad \text{et} \quad \underline{u}_2 = \frac{jL_2 \omega \underline{e}}{R + jL_1 \omega + jL_2 \omega}$$

2) Dans un ALI idéal en fonctionnement linéaire, on considère que l'impédance d'entrée de l'ALI est infinie et que la tension différentielle est nulle, ceci implique que :

$$\begin{aligned} i_+ &= i_- = 0 \\ V_+ &= V_- \end{aligned}$$

3) En adoptant les notations complexes : $\underline{V}(-) = \underline{V}(+)$ et courant $\underline{i}(-) = \underline{i}(+) = 0$.

En reconnaissant un diviseur de tension :

$$\underline{V}(+) = \frac{\underline{u}_1}{2}$$

Appliquons la loi des mailles :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_2 - 2R_2 \underline{i}_2 = \underline{V}(-) - R_2 \underline{i}_2$$

On en déduit que :

$$R_2 \underline{i}_2 = \underline{u}_2 - \underline{V}(-)$$

$$\underline{u}_s = \underline{V}(-) - (\underline{u}_2 - \underline{V}(-)) = 2\underline{V}(-) - \underline{u}_2 = 2\left(\frac{\underline{u}_1}{2}\right) - \underline{u}_2$$

On vérifie que :

$$\underline{u}_s = \underline{u}_1 - \underline{u}_2$$

4) Etablissons l'expression de la fonction de transfert du filtre :

$$\underline{H}(j.\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{e}} = \frac{\underline{u}_1 - \underline{u}_2}{\underline{e}}$$

En explicitant :

$$\underline{H}(j.\omega) = \frac{jL_1 \omega - jL_2 \omega}{R + jL_1 \omega + jL_2 \omega} = \frac{j(L_1 - L_2)\omega}{R + j(L_1 + L_2)\omega}$$

Avec :

$$L_1 - L_2 = L_e \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta} \right) - L_e \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta} \right) = 2L_e \left(\frac{\Delta z}{\delta} \right)$$

$$L_1 + L_2 = L_e \left(1 + \frac{\Delta z}{\delta} \right) + L_e \left(1 - \frac{\Delta z}{\delta} \right) = 2L_e$$

$$\underline{H}(j, \omega) = \frac{j \left(2L_e \left(\frac{\Delta z}{\delta} \right) \right) \omega}{R + j(2L_e) \omega} = \frac{j \left(\frac{2L_e}{R} \left(\frac{\Delta z}{\delta} \right) \right) \omega}{1 + j \left(\frac{2L_e}{R} \right) \omega}$$

On vérifie que :

$$\underline{H}(j, \omega) = H_0 \left(\frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \right)$$

Avec :

$$H_0 = \frac{\Delta z}{\delta} \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{R}{2L_e}$$

5) Posons $\underline{H}(j\omega) = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$:

- A basse fréquence : $\underline{H}(j\omega) = jH_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$ donc $H(\omega) = H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$ et :

$$\begin{cases} H_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0) + 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \\ \varphi(\omega) = +\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- A haute fréquence : $\underline{H}(j, \omega) = H_0$ et :

$$\begin{cases} H_{dB}(\omega) = 20 \log(H_0) \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases}$$

6) On reconnaît les caractéristiques d'un **filtre passe-haut**.

7) Explicitons $H(\omega)$:

$$H(\omega) = \frac{H_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}}$$

En notant que $H_{max} = H_0$ on constate que $H(\omega_0) = \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ et :

$$H_{dB}(\omega_0) = H_{dBmax} - 3,0$$

Par définition, on peut dire que ω_0 est la pulsation de coupure du filtre passe-haut à $-3,0 \text{ dB}$.

8) Pour que $H(\omega)$ soit indépendant de ω il faut travailler à **haute fréquence**, c.à.d. pour $\omega \gg \omega_0$. Dans ces conditions :

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$$

On vérifie que $\underline{H}(j, \omega)$ est proportionnel au déplacement de la rame Δz .

9) Pour une fréquence d'utilisation $f = 4,00 \text{ kHz}$: $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 25,1 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. Avec $\omega_0 = \frac{R}{2L_e}$; $\omega_0 = 6,25 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. On constate que l'hypothèse $\underline{H}(j\omega) = H_0 = \frac{\Delta z}{\delta}$ est vérifiée...

Sachant que :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{\Delta z}{\delta}$$

$$\underline{u}_s = \left(\frac{\Delta z}{\delta} \right) \underline{u}_e$$

En repassant aux notations réelles on établit que :

$$u_s(t) = \frac{E \Delta z}{\delta} \cos(\omega t)$$

10) Par identification $\varphi = 0$ ce qui est en accord avec le fait qu'à haute fréquence $\varphi(\omega) = 0$.

C. Electronique et conditionnement

1) Multiplieur analogique :

$$s_m(t) = K_m \cdot e(t) u_s(t)$$

En explicitant :

$$s_m(t) = \frac{K_m E^2 \Delta z}{\delta} \cos^2(\omega t)$$

Posons :

$$\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} (1 + \cos(2\omega t))$$

$$s_m(t) = \frac{K_m E^2 \Delta z}{2\delta} (1 + \cos(2\omega t))$$

On en déduit que le spectre en amplitude de $s_m(t)$ est composé d'une composante continue et d'une fonction harmonique de pulsation $2 \cdot \omega$ de même amplitude.

2) Pour récupérer la composante continue du signal, il faut utiliser un filtre passe-bas de pulsation de coupure $\omega_c \ll 2\omega$. Pour cela, on peut prélever la tension de sortie aux bornes du condensateur dans un circuit (R, C) série (filtre passe-bas du premier ordre). Dans ces conditions, la tension de sortie est :

$$s_m = \frac{K_m E^2 \Delta z}{2\delta}$$

3) Sensibilité du capteur :

$$\frac{s_m}{\Delta z} = \frac{K_m E^2}{2\delta}$$

4) Déterminons le plus petit écart relatif de position mesurable :

$$\frac{\Delta z}{\delta} = \frac{2s_m}{K_m E^2}$$

A.N. : $\frac{\Delta z}{\delta} = 5,56 \cdot 10^{-4}$.